Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag, 16.07.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei N ein Poisson-Prozess zum Parameter $\lambda > 0$, sei $(M_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch $M_t = N_t - \lambda t$ und sei weiter

$$Z_t = e^{(\lambda-\mu)t}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{N_t}, \quad t \geq 0,$$

wobei $\mu > 0$. Zeigen Sie, dass Z eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = \frac{\mu-\lambda}{\lambda} Z_{t-}\, dM_t$$

mit Startwert $Z_0 = 1$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch $M_t = e^{\frac{t}{2}} \cos(B_t)$. Zeigen Sie, dass M ein quadratintegriebrares Martingal ist und geben Sie einen vorhersagbaren $(\mathcal{H}^2, B)$-integrierbaren Prozess H an, so dass

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s\, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ und es sei $\mathbb{Q}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß, bezüglich dessen $(B_t + t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ lokaläquivalent zu $\mathbb{P}$ ist ($\mathbb{Q} \sim_{loc} \mathbb{P}$) aber $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ nicht äquivalent sind ($\mathbb{P} \nsim \mathbb{Q}$).

Hinweis: Zeigen Sie für $\mathbb{P} \nsim \mathbb{Q}$, dass $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ orthogonal sind, d.h. es gibt eine Menge $N \in \mathcal{F}_\infty$ mit $\mathbb{P}(N) = \mathbb{Q}(N^c) = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein stetiger Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ genau dann ein (strikt-)positives lokales Martingal ist, wenn

$$X = \exp(N - \frac{1}{2}[N, N])$$

gilt für ein stetiges lokales Martingal N.

Hinweis: Der stochastische Logarithmus könnte hilfreich sein. Er ist das Inverse des stochastischen Exponential, d.h. ist $X = \mathcal{E}(Y)$, dann ist Y der stochastische Logarithmus von X.