Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag, 02.07.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $[M, M]_\infty = \infty$ fast sicher. Zeigen Sie, dass fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{[M,M]_t} = 0$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie den zweiten Teil von Satz 5.10 der Vorlesung, d.h. $M_t = B_{[M,M]_t}$ fast sicher, und folgern Sie daraus, dass für eine Standard-Brownsche Bewegung $B = (B_t)_{t\geq 0}$ und einen linksseitig stetigen, deterministischen Prozess $H = (H_t)_{t\geq 0}$ das stochastische Integral $(H \cdot B)$ ein Gauß-Prozess ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $H = (H_t)_{t\geq 0}$ càglàd, so dass $\int_0^\infty H_s^2 ds = \infty$ fast sicher. Finden Sie eine (zufällige) Funktion τ, sodass $(H \cdot B)_t \overset{d}{=} B_{\tau(t)}$. Ist es möglich, τ so zu wählen, dass die Gleichheit fast sicher gilt?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $B := (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass der durch

$$Y_t := \int_0^t \exp\left(B_t - B_s - \tfrac{1}{2}(t-s)\right) ds,\ t \geq 0$$

definierte Prozess die folgende Darstellung besitzt:

$$Y_t = t + \int_0^t Y_s \, dB_s,\ t \geq 0.$$