Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag, 25.06.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal. Zeigen Sie

$$d(\frac{1}{\mathcal{E}(X)}) = \frac{-dX + d[X,X]}{\mathcal{E}(X)}.$$

b) Verallgemeinern Sie das Ergebnis aus a), indem sie für ein stetiges Semimartingal $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und jedes $p \in \mathbb{R}$ zeigen, dass

$$(\mathcal{E}(X))^p = \mathcal{E}(pX + \frac{p(p-1)}{2}[X,X]).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung.

a) Zeigen Sie, dass $M = \mathcal{E}(B)$ ein lokales quadratintegrierbares lokales Martingal ist.

b) Berechnen Sie $[M,M]_t$ und zeigen Sie weiter $\mathbb{E}[[M,M]_t] < \infty$. Folgern sie daraus, dass $(M_{s\wedge t})_{s\geq 0}$ ein quadratintegrierbares Martingal ist.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{B_t}]$.