Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 18.06.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und sei für eine reellwertige Zufallsvariable Y_0 und $\mu, \sigma \geq 0$ der Prozess $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ definiert durch

$$Y_t := e^{-\mu t}\Big(Y_0 + \sigma \int_0^t e^{\mu s} dB_s\Big).$$

Zeigen Sie, dass Y eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = -\mu Y_t \, dt + \sigma \, dB_t$$

ist. In Integralschreibweise heißt das

$$Y_t = Y_0 - \mu \int_0^t Y_s \, ds + \sigma B_t.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $Y = (Y_t)_{0 \leq t < 1}$ definiert durch

$$Y_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} \, dB_s.$$

Zeigen Sie, dass Y eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dY_t = -\frac{Y_t}{1-t} \, dt + dB_t, \quad \text{d.h.} \quad Y_t = -\int_0^t \frac{Y_s}{1-s} \, ds + \int_0^t dB_s,$$

ist und dass $\lim_{t \to 1} \mathbb{E}[Y_t^2] = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass $(Y_t)_{t\geq 0}$ definiert durch $Y_t := \frac{B_t}{1+t}$ die stochastische Differentialgleichung

$$dY_t = -\frac{1}{1+t}Y_t\,dt + \frac{1}{1+t}\,dB_t$$

mit Anfangswert $Y_0 = 0$ löst.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $A = (A_t)_{t\geq 0}$ und $C = (C_t)_{t\geq 0}$ zwei nichtfallende càdlàg-Prozesse mit $A_0 = C_0 = 0$. Wir nehmen an, dass $A_\infty = \lim_{t\to\infty} A_t$ und $C_\infty = \lim_{t\to\infty} C_t$ endlich sind. Zeigen Sie, dass

$$A_\infty C_\infty = \int_0^\infty (A_\infty - A_s)dC_s + \int_0^\infty (C_\infty - C_{s-})dA_s$$

gilt.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Es sei $A = (A_t)_{t\geq 0}$ ein nicht-fallender stetiger Prozess mit $A_0 = 0$. Wir nehmen weiter an, dass $\lim_{t\to\infty} A_t = A_\infty$ endlich ist. Zeigen Sie für jedes $n \geq 1$

$$(A_\infty)^n = n! \int_0^\infty dA_{s_1} \int_{s_1}^\infty dA_{s_2} \cdots \int_{s_{n-1}}^\infty dA_{s_n}.$$