Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 04.06.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $M = (M_t)_{t\geq 0}$ und $N = (N_t)_{t\geq 0}$ unabhängige stetige lokale Martingale bezüglich einer gemeinsamen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, d.h. die σ-Algebren $\sigma(M_t : t \geq 0) \subset \mathbb{F}$ und $\sigma(N_t : t \geq 0) \subset \mathbb{F}$ sind unabhängig.

a) Zeigen Sie, dass dann $[M, N] = 0$ gilt, oder äquivalent dazu, dass MN ein stetiges lokales Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.

b) Seien nun B eine Standard-Brownsche Bewegung, T eine nicht fast sicher konstante Stoppzeit und B^T die zugehörige gestoppte Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie anhand von B^T und $B - B^T = (B_t - B_t^T)_{t\geq 0}$, dass die Umkehrung in a) im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie für eine Standard-Brownsche Bewegung B, dass

$$\int_0^t s\, dB_s = tB_t - \int_0^t B_s\, ds.$$

Hinweis: $\sum_j \Delta(s_j B_{s_j}) = \sum_j s_j \Delta B_{s_j} + \sum_j B_{s_{j-1}} \Delta s_j$, mit $0 = s_0 < \cdots < s_n = t$ einer Partition des Intervalls $[0, t]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger beschränkter stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen und M_0 konstant. Zeigen Sie, dass $N := (N_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $N_t := M_t - \mathbf{E}[M_t]$ ein stetiges Martingal bezüglich der von (M_t) erzeugten Filtration ist. Bestimmen Sie $([N, N]_t)_{t\geq 0}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X ein Semimartingal bzgl. dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Sei $\mathbb{P}'$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$. Wir bezeichnen mit $[X, X]^{\mathbb{P}}$ die quadratische Variation von X, wobei wir X als $\mathbb{P}$-Semimartingal auffassen. Zeigen Sie

$$[X, X]^{\mathbb{P}'} = [X, X]^{\mathbb{P}}, \ \mathbb{P}'\text{-fast sicher.}$$