Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag, 28.05.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine nicht-fallende, stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass es ein stetiges Martingal $M = (M_t)_{t\geq 0}$ gibt, sodass $[M, M]_t = f(t)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei B eine Standard-Brownsche Bewegung und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die in einem Punkt springt und sonst überall stetig ist. Zeigen Sie, dass $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t := f(B_t)$ kein Semimartingal sein kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal und $A = (A_t)_{t\geq 0}$ ein stetiger Prozess mit Pfaden von lokal beschränkter Variation und $A_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für $X = (X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_t := M_t + A_t$ gilt:

$$[X, X] = [M, M] \text{ fast sicher.}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien X, Y zwei unabhängige Standard-Brownsche Bewegungen und $0 < \alpha < 1$. Setze

$$B_t = \alpha X_t + \sqrt{1-\alpha^2} Y_t.$$

Zeigen Sie, dass $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist und berechnen Sie $[X, B]$ und $[Y, B]$.