Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 21.05.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Sei $B = (B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ eine Folge von Partitionen des Intervalls $[0,t]$ mit $|\Delta_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Berechnen sie das stochastische Integral $\int_0^t B_s dB_s$ durch Approximation von $(B_s)_{0\leq s\leq t}$ durch $(B_s^n)_{0\leq s\leq t}$ mit

$$B_s^n = \sum_{t_k \in \Delta_n} B_{t_k} \mathbb{1}_{(t_k, t_{k+1}]}(s).$$

(Begründen Sie zunächst, dass $B^n \underset{n\to\infty}{\overset{ucp}{\longrightarrow}} B$.)

b) Vergleichen Sie das erhaltene Ergebnis mit dem (stochastischen) Stieltjes-Integral $\int_0^t A_s dA_s$ für einen stochastischen Prozess $A = (A_t)_{t\geq 0}$ mit stetigen Pfaden von lokal beschränkter Variation.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Raum $\mathscr{D}$ aller adaptierten stochastischen Prozesse mit càdlàg-Pfaden vollständig ist bezüglich der Metrik

$$d(X,Y) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \mathbb{E}[(X-Y)_n^\star \wedge 1].$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1) Überlegen Sie sich zunächst, dass es für eine Cauchyfolge bezüglich d pfadweise eine konvergente Teilfolge gibt bzgl. der uniformen Konvergenz auf Kompakta (pfadweise befinden wir uns in $\mathbb{R}$!).

2) Zeigen Sie dann, dass dieser Limes càdlàg-Pfade besitzt.

3) Zu guter Letzt prüfen Sie, dass dies auch der Limes der gesamten Cauchyfolge ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass für eine quadratintergierbares lokales Martingal mit càdlàg-Pfaden das stochastische Integral $(H \cdot X)$ wieder ein quadratintegrierbares lokales Martingal ist. Zeigen Sie, dass dafür die Vorraussetzung $H \in \mathscr{L}$ (linksseitig stetiger Integrand) notwendig ist.
Betrachten Sie dazu als Integrator X den kompensierten Poissonprozess $M_t = N_t - \lambda t$ und basteln Sie sich aus dessen Sprungzeiten einen càdlàg-Integranden $H \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{L}$. Was ist dann $\int_0^t H_s dM_s$?.