Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 3

Abgabetermin: Dienstag, 14.05.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Diskrete Version der Ito-Formel:

Es seien $X := (X_n)_{0\le n\le N}$ und $Y := (Y_n)_{0\le n\le N}$ zwei Folgen von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ mit $X_0 = Y_0 = 0$ und $[X,Y] = ([X,Y]_n)_{0\le n\le N}$, wobei

$$[X,Y]_n := \sum_{k=1}^{n} \Delta X_k \Delta Y_k, \quad \text{mit } \Delta X_k := X_k - X_{k-1} \text{ und } \Delta Y_k := Y_k - Y_{k-1}.$$

Ferner sei F eine (*absolut stetige*) Funktion mit $F(x) = F(0) + \int_0^x f(y)\,dy$, wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion ist mit $\int_{|y|\le c} |f(y)|\,dy < \infty$ für alle $c > 0$.

Eine Version des diskreten stochastischen Integrals von $f(X) := (f(X_n))_{0\le n\le N}$ bezüglich X ist definiert durch

$$I_n := (f(X)\cdot X)_n = \sum_{k=1}^{n} f(X_{k-1})\Delta X_k, \quad 1 \le n \le N.$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt
$$F(X_n) = F(X_0) + I_n + \tfrac{1}{2}[X, f(X)]_n + R_n(X, f(X)), \tag{1}$$
wobei
$$R_n(X, f(X)) = \sum_{k=1}^{n} \int_{X_{k-1}}^{X_k} \Big(f(x) - \tfrac{1}{2}(f(X_k) + f(X_{k-1}))\Big)dx.$$

b) Ist f'' stetig, so gilt (hier ist evtl. die aus Analysis 1 oder Numerischer Mathematik bekannte *Trapezregel* hilfreich)
$$R_n(X, f(X)) = -\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n} f''(\eta_k)(\Delta X_k)^3$$
für geeignete $X_{k-1} \le \eta_k \le X_k$. (Insbesondere gilt $R_n(X, f(X)) = 0$ für $f(x) = a + bx$, was in diesem Fall die Gleichung (1) deutlich vereinfacht.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Definiere für zwei Zufallsvariablen X, Y

$$d(X,Y) := \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right].$$

Zeigen Sie:

a) d definiert eine Metrik auf dem Raum der Zufallsvariablen von Ω nach $\mathbb{R}$.

b) $X_n \xrightarrow{p} X \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(X_n, X) = 0.$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}'$ zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Sei weiter $\mathbb{P}' \ll \mathbb{P}$, d.h. $\mathbb{P}'$ ist absolut stetig bzgl. $\mathbb{P}$. Zeigen Sie: Sind $X, (X_n)_{n\geq 1}$ Zufallsvariablen und gilt $X_n \xrightarrow{p} X$ bzgl. $\mathbb{P}$, so gilt auch $X_n \xrightarrow{p} X$ bzgl. $\mathbb{P}'$.