Übungen zur Vorlesung „Stochastische Integration und Finanzmathematik“

Blatt 2

Abgabetermin: Dienstag, 07.05.2019, bis 14.00 Uhr im zugehörigen Briefkasten im UG des Mathematischen Instituts, Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei T eine endliche Stoppzeit. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{F}_T = \sigma(X_T \mid X \text{ càdlàg-Prozess})$,

b) $\mathcal{F}_{T-} = \sigma(X_{T-} \mid X \text{ càdlàg-Prozess})$.

Hinweis: Betrachten Sie für a) $X_t = \mathbb{1}_{F\cap\{T\leq t\}}$ für $F \in \mathcal{F}_T$. Für b) überlegen Sie sich zunächst, dass für einen càdlàg-Prozess X gilt, dass X_{T-} $\mathcal{F}_{T-}$-messbar ist. Betrachten Sie dann $X_t = \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{[s-\frac{1}{n},\infty)}(t)$ für $F \in \mathcal{F}_r$ mit $r < s$ und genügend große $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Es seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei an dieselbe Filtration adaptierte stochastische càdlàg-Prozesse. Ferner sei Y von endlicher Variation. Zeigen Sie: Wenn Y stetige differenzierbare Pfade besitzt, so gilt

$$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X_s \dot{Y}_s ds.$$

Dabei bezeichnet der Punkt die Ableitung nach s.

Hinweis: Die Zerlegung $Y_t = Y_0 + \int_0^t |\dot{Y}_s| ds - \int_0^t (|\dot{Y}_s| - \dot{Y}_s) ds$ kann hilfreich sein.

b) Berechnen Sie die folgenden Lebesgue-Stieltjes-Integrale:

$$\int_0^t f(s)\ d\lfloor s\rfloor \text{ und } \int_1^2 s\ d\log s.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein beschränktes lokales Martingal bzgl. einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

b) Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein nichtnegatives lokales Martingal bzgl. einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Supermartingal bzgl. $\mathbb{F}$ ist.