Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Risikotheorie

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe

Sommersemester 2019

Abteilung für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Dynamische Modelle

1.1 Erneuerungstheorie

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin sei $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $G : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $G(0) = 0$. Wir definieren die monoton wachsende Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $T_0 := 0$ und

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} W_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin definieren wir den Prozess N durch

$$N_t := \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \le t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 1.1.1. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(W_n > 0) = 1$, und daher $\mathbb{E}[W_n] > 0$. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt*

$$\frac{T_n}{n} \overset{f.s.}{\to} \mathbb{E}[W_1],$$

und daher $T_n \overset{f.s.}{\to} \infty$. Also ist N ein wohldefinierter, monoton wachsender $\mathbb{N}_0$-wertiger càdlàg-Prozess mit $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$.

Definition 1.1.2. *Wir nennen N einen Erneuerungsprozess zur Erneuerungsfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Bemerkung 1.1.3.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$T_n = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = n\}.$$

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$W_n = T_n - T_{n-1}.$$

(c) Es gelten die Darstellungen

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[\![T_k,\infty[\![} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{[\![T_k,T_{k+1}[\![},$$

also ausführlich

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(d) Wegen $T_n \overset{f.s.}{\to} \infty$ *für* $n \to \infty$ *gilt* $N_t \overset{f.s.}{\to} \infty$ *für* $t \to \infty$.

Lemma 1.1.4.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sigma(T_0, T_1, \ldots, T_n) = \sigma(W_1, \ldots, W_n).$$

(b) Es gilt

$$\sigma(N_t : t \in \mathbb{R}_+) = \sigma(T_n : n \in \mathbb{N}_0) = \sigma(W_n : n \in \mathbb{N}).$$

Beweis.

(a) Die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$Aw = (w_1, w_1 + w_2, \ldots, w_1 + \ldots + w_n)$$

ist bijektiv mit

$$A^{-1}t = (t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_n - t_{n-1}).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\sigma(T_0, T_1, \ldots, T_n) = \sigma(T_1, \ldots, T_n) = \sigma(\{(T_1, \ldots, T_n) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\
&= \sigma(\{A(W_1, \ldots, W_n) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\
&= \sigma(\{(W_1, \ldots, W_n) \in A^{-1}(B)\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subset \sigma(W_1, \ldots, W_n)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sigma(W_1, \ldots, W_n) = \sigma(\{(W_1, \ldots, W_n) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\
&= \sigma(\{A^{-1}(T_1, \ldots, T_n) \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\
&= \sigma(\{(T_1, \ldots, T_n) \in A(B)\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \subset \sigma(T_0, T_1, \ldots, T_n).
\end{aligned}$$

(b) Nach Lemma 1.1.5(a) gilt

$$\begin{aligned}\sigma(N_t : t \in \mathbb{R}_+) &= \sigma(\{N_{t_1} \geq k_1, \dots, N_{t_n} \geq k_n\} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+ \\ &\qquad \text{und } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0) \\ &= \sigma(\{T_{k_1} \leq t_1, \dots, T_{k_n} \leq t_n\} : n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+ \\ &\qquad \text{und } k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0) = \sigma(T_n : n \in \mathbb{N}_0),\end{aligned}$$

und wie in Teil (a) folgt

$$\begin{aligned}\sigma(T_n : n \in \mathbb{N}_0) &= \sigma(\{(T_1, \dots, T_n) \in B\} : n \in bbn \text{ und } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\ &= \sigma(\{(W_1, \dots, W_n) \in B\} : n \in \mathbb{N} \text{ und } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \\ &= \sigma(W_n : n \in \mathbb{N}).\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.1.5. *Es seien $t \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}_0$ beliebig.*

(a) Es gilt $\{N_t \geq k\} = \{T_k \leq t\}$ sowie

$$\mathbb{P}(N_t \geq k) = \mathbb{P}(T_k \leq t) = G^{*k}(t).$$

(b) Es gilt $\{N_t = k\} = \{T_k \leq t\} \setminus \{T_{k+1} \leq t\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}$ sowie

$$\mathbb{P}(N_t = k) = G^{*k}(t) - G^{*(k+1)}(t).$$

Beweis.

(a) Nach Bemerkung 1.1.3(c) gilt

$$\{N_t \geq k\} = \{T_k \leq t\},$$

und wegen $T_k = W_1 + \ldots + W_k$ gilt

$$\mathbb{P}(T_k \leq t) = G^{*k}(t).$$

(b) Nach Bemerkung 1.1.3(c) gilt

$$\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\}.$$

Weiterhin gilt

$$\{N_t = k\} = \{N_t \geq k\} \setminus \{N_t \geq k+1\},$$

und mit Teil (a) folgt

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(N_t \geq k) - \mathbb{P}(N_t \geq k+1) = G^{*k}(t) - G^{*(k+1)}(t).$$

□

Definition 1.1.6. *Für $\lambda > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ nennen wir $\mathrm{Erl}(\lambda, n) := \Gamma(n, \lambda)$ die Erlang-Verteilung mit Parametern λ und n. Sie hat also die Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 1.1.7. *Für jedes $\lambda > 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\mathbb{P} \circ W_n = \mathrm{Exp}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gilt $\mathbb{P} \circ T_n = \mathrm{Erl}(\lambda, n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Es gilt $\mathbb{P} \circ N_t = \mathrm{Pois}(\lambda t)$ für alle $t \in (0, \infty)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $T_n = W_1 + \ldots + W_n$ und $W_1, \ldots, W_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es sei $t \in (0, \infty)$ beliebig. Nach Lemma 1.1.5(b) gilt wegen $T_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Nun sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wegen $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ und $T_{n+1} \sim \Gamma(n+1, \lambda)$ folgt mit Lemma 1.1.5(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \le t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \le t) \\ &= \int_0^t \frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} ds - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} s^n}{n!} e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda s} \left(\frac{\lambda^n s^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\lambda^{n+1} s^n}{n!} \right) ds = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) &= -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} + e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n n t^{n-1}}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Also gilt $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in (0, \infty)$ beliebig. Wegen $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$ gilt nach Lemma 1.1.5(a)

$$\mathbb{P}(W_1 \le t) = \mathbb{P}(T_1 \le t) = \mathbb{P}(N_t \ge 1) = 1 - \mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Also gilt $W_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Da die Zufallsvariablen $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ identisch verteilt sind, folgt $W_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Lemma 1.1.8. *Es seien $r \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_r \geq 0$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_1 \leq t_0) < 1$ für ein $t_0 \in (0, \infty)$. Weiterhin sei $t \in (0, rt_0]$ beliebig. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_r \leq t) < 1.$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathbb{P}(X_1 > t_0) > 0,$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_r \leq t) &\leq \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_r \leq rt_0) \\
&\leq \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{i=1}^{r}\{X_i \leq t_0\}\bigg) = 1 - \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{i=1}^{r}\{X_i > t_0\}\bigg) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{r}\mathbb{P}(X_i > t_0) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > t_0)^r < 1.
\end{aligned}$$

□

Satz 1.1.9. *Es gilt $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Dies ist klar für $t = 0$, da $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$. Nun sei $t \in (0, \infty)$ beliebig. Wegen $G(0) = 0$ und der Rechtsstetigkeit von G existiert ein $t_0 \in (0, \infty)$ mit $G(t_0) < 1$. Wir setzen $r := \lceil \frac{t}{t_0} \rceil \in \mathbb{N}$ und $s := \frac{t}{r} \in (0, t_0]$. Wir definieren die Folge $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$Y_k := T_{kr} - T_{(k-1)r}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Also gilt

$$Y_k = W_{(k-1)r+1} + \dots + W_{kr}, \quad k \in \mathbb{N},$$

und folglich sind die Zufallsvariablen $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion $\hat{G} = G^{*r}$. Es gilt $t \in (0, rt_0]$, und mit Lemma 1.1.8 folgt $\hat{G}(t) < 1$. Wir setzen $c := -\ln \hat{G}(t) \in (0, \infty]$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$ nach Lemma 1.1.5(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t \geq kr) = \mathbb{P}(T_{kr} \leq t) &= \mathbb{P}\bigg(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq t\bigg) \\
&\leq \mathbb{P}(Y_1 \leq t, \dots, Y_k \leq t) = \hat{G}(t)^k = \exp(-ck).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $c = \infty$

$$\mathbb{P}(N_t \geq kr) = 0.$$

Nun folgt mit dem Integralvergleichskriterium für Reihen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N_t] &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_t \geq j) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \big(\mathbb{P}(N_t \geq lr - (r-1)) + \ldots + \mathbb{P}(N_t \geq lr - 1) + \mathbb{P}(N_t \geq lr)\big) \\ &\leq r \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t \geq kr) \leq r \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-ck) < \infty,\end{aligned}$$

da

$$\int_0^{\infty} \exp(-cx)dx < \infty.$$

$\square$

Definition 1.1.10. *Die* <u>*Erneuerungsfunktion*</u> $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *ist definiert durch*

$$M(t) := \mathbb{E}[N_t], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 1.1.11. *Die Erneuerungsfunktion ist nach Satz 1.1.9 tatsächlich endlich.*

Satz 1.1.12.

(a) Es gilt die Darstellung

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}.$$

(b) M *ist monoton wachsend und rechtsstetig mit* $M(0) = 0$*, und es gilt* $M(t) \to \infty$ *für* $t \to \infty$*.*

Beweis.

(a) Nach Bemerkung 1.1.3(c), dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 1.1.5(a) gilt

$$M(t) = \mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_k \leq t) = \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t).$$

(b) Wegen $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$ gilt $M(0) = \mathbb{E}[N_0] = 0$. Für $s \leq t$ gilt $\mathbb{P}(N_s \leq N_t) = 1$, und daher

$$M(s) = \mathbb{E}[N_s] \leq \mathbb{E}[N_t] = M(t).$$

Wegen $N_t \overset{\text{f.s.}}{\to} \infty$ für $t \to \infty$ folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{t\to\infty} M(t) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}\Big[\lim_{t\to\infty} N_t\Big] = \infty.$$

Da die Pfade von N rechtsstetig sind, folgt mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{u\downarrow t} M(u) = \lim_{u\downarrow t} \mathbb{E}[N_u] = \mathbb{E}\Big[\lim_{u\downarrow t} N_u\Big] = \mathbb{E}[N_t] = M(t).$$

□

Definition 1.1.13. *Es sei $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und messbar, und es sei $B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ càdlàg und von lokal beschränkter Variation. Wir definieren $A * B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch*

$$A * B(t) := \int_{(0,t]} A(t-s)dB(s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Lemma 1.1.14. *Es seien $A, B : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ càdlàg und von lokal beschränkter Variation mit $A(0) = B(0) = 0$. Dann gilt $A * B = B * A$.*

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Zunächst nehmen wir an, dass A und B auf $[0,t]$ monoton wachsend sind mit $A(t) = B(t) = 1$. Wir definieren die Verteilungsfunktionen $\bar{A}, \bar{B} : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$\bar{A} := A\mathbb{1}_{[0,t]} + \mathbb{1}_{(t,\infty)},$$
$$\bar{B} := B\mathbb{1}_{[0,t]} + \mathbb{1}_{(t,\infty)}.$$

Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen $\bar{A}$ und $\bar{B}$. Dann ist nach [Tap19, Satz 3.2.4(a)] im Sinne von [Tap19, Def. 3.2.2] $\bar{A} * \bar{B}$ die Verteilungsfunktion von $X + Y$, und $\bar{B} * \bar{A}$ die Verteilungsfunktion von $Y + X$. Also folgt

$$A * B(t) = \int_{(0,t]} A(t-s)dB(s) = \int_{\mathbb{R}} \bar{A}(t-s)d\bar{B}(s) = \bar{A} * \bar{B}(t) = \bar{B} * \bar{A}(t)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \bar{B}(t-s)d\bar{A}(s) = \int_{(0,t]} B(t-s)dA(s) = B * A(t).$$

Nun betrachten wir die allgemeine Situation. Nach [Tap19, Satz 1.1.20] existieren monoton wachsende, rechtsstetige Funktionen $A^+, A^-, B^+, B^- : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $A^+(0) = A^-(0) = B^+(0) = B^-(0) = 0$ und $A = A^+ - A^-$ und $B = B^+ - B^-$. Dann gilt

$$A * B = A^+ * B^+ - A^- * B^+ - A^+ * B^- + A^- * B^-.$$

Folglich dürfen wir annehmen, dass A und B monoton wachsend sind. Nun sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Wir dürfen annehmen, dass $\lambda := A(t) > 0$ und $\mu := B(t) > 0$, denn andernfalls gilt

$$A * B(t) = 0 = B * A(t).$$

Nun folgt mit den vorherigen Überlegungen

$$A * B(t) = \lambda\mu\,(A/\lambda) * (B/\mu)(t) = \lambda\mu\,(B/\mu) * (A/\lambda)(t) = B * A(t).$$

□

Lemma 1.1.15. *Sind $A, B, C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ càdlàg und von lokal beschränkter Variation mit $A(0) = B(0) = C(0)$. Dann gilt*

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

Beweis. Verläuft ähnlich wie der Beweis von Lemma 1.1.14. Sind A, B, C die Verteilungsfunktionen von unabhängigen Zufallsvariablen X, Y, Z, so ist $(A * B) * C$ die Verteilungsfunktion von $(X + Y) + Z$, und $A * (B * C)$ die Verteilungsfunktion von $X + (Y + Z)$. □

Definition 1.1.16. *Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Räume. Eine Abbildung $K : \Omega_1 \times \mathscr{F}_2 \to [0, 1]$ heißt ein <u>stochastischer Kern</u> von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$, falls gilt:*

(a) $\omega_1 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ ist $\mathscr{F}_1$-messbar für jedes $A_2 \in \mathscr{F}_2$.

(b) $A_2 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$.

Satz 1.1.17. *Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ messbare Räume, es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$, und es sei K ein stochastischer Kern von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \otimes K$ auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$, so dass*

$$(\mu \otimes K)(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} K(\omega_1, A_2)\mu(d\omega_1) \quad \textit{für alle } A_1 \in \mathscr{F}_1 \textit{ und } A_2 \in \mathscr{F}_2.$$

Satz 1.1.18 (Satz von Fubini für stochastische Kerne)**.** *Es seien* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ *messbare Räume, es sei* μ *ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$*, und es sei* K *ein stochastischer Kern von* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ *nach* $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$*. Weiterhin sei*

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mu \otimes K).$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu \otimes K) = \int_{\Omega_1} \bigg(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) K(\omega_1, d\omega_2) \bigg) \mu(d\omega_1).$$

Satz 1.1.19. *Für jedes* $t \in \mathbb{R}_+$ *gilt*

$$\mathbb{P} \circ (N_t, W_1) = K_t \otimes (\mathbb{P} \circ W_1),$$

wobei der stochastische Kern K_t *von* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *nach* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *gegeben ist durch*

$$K_t(x, \cdot) = \begin{cases} \mathbb{P} \circ (1 + N_{t-x}), & x \leq t, \\ \delta_0, & x > t. \end{cases}$$

Beweis. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ beliebig. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq t$ gilt nach Lemma 1.1.5(a)

$$\mathbb{P}(T_{k-1} \leq t - x) = \mathbb{P}(N_{t-x} \geq k - 1) = \mathbb{P}(1 + N_{t-x} \geq k),$$

und im Fall $x > t$ gilt

$$\mathbb{P}(T_{k-1} \leq t - x) = 0.$$

Also gilt nach Lemma 1.1.5(a) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_t \geq k, W_1 \in B) = \mathbb{P}(T_k \leq t, W_1 \in B) = \mathbb{P}(W_1 + \ldots + W_k \leq t, W_1 \in B) \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{W_1 + \ldots + W_k \leq t\}} \mathbb{1}_{\{W_1 \in B\}}] \\
&= \int_{\mathbb{R}^k} \mathbb{1}_{\{x_1 + \ldots + x_k \leq t\}} \mathbb{1}_B(x_1) d(\mathbb{P} \circ (W_1, \ldots, W_k))(x_1, \ldots, x_k) \\
&= \int_B \bigg(\int_{\mathbb{R}^{k-1}} \mathbb{1}_{\{x_1 + \ldots + x_k \leq t\}} d(\mathbb{P} \circ (W_2, \ldots, W_k))(x_2, \ldots, x_k) \bigg) d(\mathbb{P} \circ W_1)(x_1) \\
&= \int_B \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x + y \leq t\}} d(\mathbb{P} \circ T_{k-1})(y) \bigg) d(\mathbb{P} \circ W_1)(x) \\
&= \int_B \mathbb{P}(x + T_{k-1} \leq t) d(\mathbb{P} \circ W_1)(x) = \int_B \mathbb{P}(T_{k-1} \leq t - x) d(\mathbb{P} \circ W_1)(x) \\
&= \int_B \mathbb{P}(N_{t-x} \geq k - 1) \mathbb{1}_{\{x \leq t\}} d(\mathbb{P} \circ W_1)(x) = \int_B \mathbb{P}(1 + N_{t-x} \geq k) \mathbb{1}_{\{x \leq t\}} d(\mathbb{P} \circ W_1)(x) \\
&= \int_B K_t(x, \mathbb{N}_k) d(\mathbb{P} \circ W_1)(x),
\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}$. □

Satz 1.1.20. *Die Erneuerungsfunktion M erfüllt die Gleichung*

$$M = G + M * G.$$

Beweis. Es sei $Y \sim \delta_0$. Nach Satz 1.1.19 und dem Satz von Fubini für stochastische Kerne (Satz 1.1.18) gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}[N_t] &= \int_{\mathbb{R}^2} k \, d(\mathbb{P} \circ (N_t, W_1))(k,x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} k \, K_t(x, dk) \right) G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \left(\int_{\mathbb{R}} k \, K_t(x, dk) \right) G(dx) + \int_{(t,\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}} k \, K_t(x, dk) \right) G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{E}[1 + N_{t-x}] G(dx) + \int_{(t,\infty)} \mathbb{E}[Y] G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \big(1 + \mathbb{E}[N_{t-x}]\big) G(dx) = \int_{(0,t]} (1 + M(t-x)) G(dx) \\
&= G(t) + \int_{(0,t]} M(t-x) G(dx).
\end{aligned}$$

□

Satz 1.1.21 (Erneuerungsgleichung)**.** *Es sei $a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt und messbar. Dann existiert genau eine lokal beschränkte, messbare Funktion $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, die eine Lösung der* <u>*Erneuerungsgleichung*</u>

$$H = a + H * G$$

ist. Diese Lösung ist gegeben durch

$$H = a + a * M.$$

Beweis. Zunächst beachten wir, dass $H = a + a * M$ lokal beschränkt und messbar ist. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} G^{*k}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (G^{*k} * G)(t) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(0,t]} G^{*k}(t-s) G(ds) = \int_{(0,t]} \sum_{k=1}^{\infty} G^{*k}(t-s) G(ds).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} G^{*k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} G^{*k} \right) * G,$$

und es folgt mit Satz 1.1.12(a)

$$\begin{aligned} H &= a + a * M = a + a * \left(\sum_{k=1}^{\infty} G^{*k} \right) = a + a * \left(G + \sum_{k=2}^{\infty} G^{*k} \right) \\ &= a + a * \left(G + \left(\sum_{k=1}^{\infty} G^{*k} \right) * G \right) = a + a * (G + M * G) = a + (a + a * M) * G \\ &= a + H * G. \end{aligned}$$

Nun sei $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine weitere lokal beschränkte und messbare Funktion mit

$$A = a + A * G.$$

Induktiv folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A &= a + A * G = a + (a + A * G) * G = a + a * G + A * G^{*2} = \dots \\ &= a + a * \sum_{k=1}^{m-1} G^{*k} + A * G^{*m} \to a + a * M \quad \text{für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Dazu beachten wir, dass wegen $T_m \to \infty$ für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$|(A * G^{*m})(t)| = \left| \int_{(0,t]} A(t-s) G^{*m}(ds) \right| \leq \sup_{s \in [0,t]} |A(s)| \mathbb{P}(T_m \leq t) \to 0,$$

und dass für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \left(a * \sum_{k=1}^{m-1} G^{*k}(t) \right) - (a * M)(t) \right| &= \left| \int_{(0,t]} a(t-s) \sum_{k=m}^{\infty} G^{*k}(ds) \right| \\ &\leq \sup_{s \in [0,t]} |a(s)| \sum_{k=m}^{\infty} G^{*k}(t) \to 0. \end{aligned}$$

Also gilt $A = a + a * M = H$. □

Bemerkung 1.1.22. *Im Fall $a = G$ ist die Lösung H der Erneuerungsgleichung aus Satz 1.1.21 gegeben durch $H = M$. Dies folgt aus Satz 1.1.20.*

Definition 1.1.23. *Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig.*

(a) Wir nennen

$$R_t := T_{N_t + 1} - t$$

die restliche Lebensdauer bis zum nächsten Sprung.

(b) *Wir nennen*

$$A_t := t - T_{N_t}$$

die *aktuelle Lebensdauer.*

(c) *Wir nennen*

$$L_t := A_t + R_t = T_{N_t+1} - T_{N_t}$$

die *Gesamtlebensdauer.*

Satz 1.1.24. *Für jedes* $t \in \mathbb{R}_+$ *gilt*

$$\mathbb{P} \circ (R_t, T_1) = K_t \otimes (\mathbb{P} \circ T_1),$$

wobei der stochastische Kern K_t *von* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *nach* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *gegeben ist durch*

$$K_t(x, \cdot) = \begin{cases} \mathbb{P} \circ R_{t-x}, & x \leq t, \\ \delta_{x-t}, & x > t. \end{cases}$$

Beweis. Es sei $z \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$K_t(x, (-\infty, z]) = \begin{cases} \mathbb{P}(R_{t-x} \leq z), & x \in (-\infty, t], \\ 1, & x \in (t, t+z], \\ 0, & x \in (t+z, \infty). \end{cases}$$

Weiterhin sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $B \neq \emptyset$ beliebig. Falls $B \subset (t, t+z]$, dann gilt wegen $\{T_1 \in B\} \subset \{t < T_1 \leq t+z\} \subset \{T_1 \leq t+z\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_t \leq z, T_1 \in B) &= \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t \leq z, T_1 \in B) = \mathbb{P}(T_1 - t \leq z, T_1 \in B) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq t+z, T_1 \in B) = \mathbb{P}(T_1 \in B) \\ &= \int_B K_t(x, (-\infty, z])(\mathbb{P} \circ T_1)(dx). \end{aligned}$$

Falls $B \subset (t+z, \infty)$, dann gilt wegen $\{T_1 \in B\} \subset \{T_1 > t+z\} \subset \{T_1 > t\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_t \leq z, T_1 \in B) &= \mathbb{P}(T_{N_t+1} - t \leq z, T_1 \in B) = \mathbb{P}(T_1 - t \leq z, T_1 \in B) \\ &= \mathbb{P}(T_1 \leq t+z, T_1 \in B) = 0 \\ &= \int_B K_t(x, (-\infty, z])(\mathbb{P} \circ T_1)(dx). \end{aligned}$$

Nun gelte $B \subset (-\infty, t]$. Nach Lemma 1.1.5(b), dem Satz von Fubini und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mathbb{P}(R_t \le z, T_1 \in B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(R_t \le z, N_t + 1 = n, T_1 \in B)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n - t \le z, N_t = n-1, T_1 \in B)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n - t \le z, T_{n-1} \le t < T_n, T_1 \in B)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W_1 + \ldots + W_n \le z + t, W_1 + \ldots + W_{n-1} \le t < W_1 + \ldots + W_n, T_1 \in B)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x_1+\ldots+x_n \le z+t\}} \mathbb{1}_{\{x_1+\ldots+x_{n-1} \le t < x_1+\ldots+x_n\}} \mathbb{1}_B(x_1)$$
$$d(\mathbb{P} \circ (W_1, \ldots, W_n))(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \Bigg(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathbb{1}_{\{x_1+\ldots+x_n \le z+t\}} \mathbb{1}_{\{x_1+\ldots+x_{n-1} \le t < x_1+\ldots+x_n\}}$$
$$d(\mathbb{P} \circ (W_2, \ldots, W_n))(x_2, \ldots, x_n) \Bigg) d(\mathbb{P} \circ T_1)(x_1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \mathbb{P}(x + W_2 + \ldots + W_n \le z + t,$$
$$x + W_2 + \ldots + W_{n-1} \le t < x + W_2 + \ldots + W_n)(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \mathbb{P}(x + W_1 + \ldots + W_{n-1} \le z + t,$$
$$x + W_1 + \ldots + W_{n-2} \le t < x + W_1 + \ldots + W_{n-1})(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \mathbb{P}(T_{n-1} - t \le z - x, T_{n-2} \le t - x < T_{n-1})(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \mathbb{P}(T_{n-1} - t \le z - x, N_{t-x} = n-2)(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_B \mathbb{P}(T_{n-1} - (t-x) \le z, N_{t-x} + 1 = n-1)(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_{N_{t-x}+1} - (t-x) \le z, N_{t-x} + 1 = n-1)(\mathbb{P} \circ T_1)(dx)$$

$$= \int_B \mathbb{P}(R_{t-x} \le z)(\mathbb{P} \circ T_1)(dx) = \int_B K_t(x, (-\infty, z])(\mathbb{P} \circ T_1)(dx).$$

□

Wir setzen $\mu := \mathbb{E}[W_1] \in (0, \infty)$. Für $z \in \mathbb{R}_+$ sei $r^z : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ definiert durch

$$r^z(t) := \mathbb{P}(R_t \le z), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Weiterhin definieren wir $G^z : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ durch

$$G^z(t) := G(z+t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 1.1.25.

(a) Für alle $z \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$r^z = G^z - (1 - G^z) * M.$$

(b) Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\mathbb{E}[R_t] = \mu(1 + M(t)) - t.$$

Beweis.

(a) Nach Satz 1.1.24 und dem Satz von Fubini für stochastische Kerne (Satz 1.1.18) gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
r^z(t) &= \mathbb{P}(R_t \le z) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{R_t \le z\}}] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{r \le z\}} d(\mathbb{P} \circ (R_t, T_1))(r, x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{r \le z\}} K_t(x, dr) \right) G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{r \le z\}} (\mathbb{P} \circ R_{t-x})(dr) \right) G(dx) \\
&\quad + \int_{(t,\infty)} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,z]}(r) \delta_{x-t}(dr) \right) G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{P}(R_{t-x} \le z) G(dx) + \int_{(t,\infty)} \delta_{x-t}((-\infty, z]) G(dx) \\
&= \int_{(0,t]} \mathbb{P}(R_{t-x} \le z) G(dx) + \int_{(t,t+z]} G(dx) \\
&= G(t+z) - G(t) + \int_{(0,t]} r^z(t-x) G(dx).
\end{aligned}$$

Mit $H := r^z$ und $a := G^z - G$ gilt also

$$H = a + H * G.$$

Nach Satz 1.1.20 gilt außerdem

$$M = G + M * G.$$

Nach Satz 1.1.21 folgt demnach

$$\begin{aligned} H &= a + a * M = G^z - G + (G^z - G) * M \\ &= G^z - M + M * G + (G^z - G) * M \\ &= G^z - M + G^z * M = G^z - (1 - G^z) * M. \end{aligned}$$

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Lemma 1.1.5(b) ist

$$\begin{aligned} \{N_t + 1 = n\} &= \{N_t = n - 1\} = \{T_{n-1} \le t < T_n\} \\ &= \{W_1 + \ldots + W_{n-1} \le t < W_1 + \ldots + W_n\} \end{aligned}$$

unabhängig von $(W_k)_{k \ge n+1}$. Mit der Ersten Waldschen Gleichung ([Tap19, Satz 3.2.20]) folgt

$$\mathbb{E}[T_{N_t+1}] = \mu\,\mathbb{E}[N_t + 1] = \mu(\mathbb{E}[N_t] + 1) = \mu(M(t) + 1),$$

und daher

$$\mathbb{E}[R_t] = \mathbb{E}[T_{N_t+1} - t] = \mathbb{E}[T_{N_t+1}] - t = \mu(M(t) + 1) - t.$$

□

Korollar 1.1.26. *Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.*

(a) Es gilt $M(t) = \lambda t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Es gilt $\mathbb{E}[R_t] = \frac{1}{\lambda}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Es sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig.

(a) Wegen $N_t \sim \mathrm{Pois}(\lambda t)$ gilt

$$M(t) = \mathbb{E}[N_t] = \lambda t.$$

(b) Wegen $W_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Mit Satz 1.1.25(b) folgt

$$\mathbb{E}[R_t] = \mu(1 + M(t)) - t = \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda t) - t = \frac{1}{\lambda}.$$

$\square$

Satz 1.1.27 (Elementarer Erneuerungssatz)**.** *Es gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

Beweis. Mit Satz 1.1.25(b) gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leq \mathbb{E}[R_t] = \mu(1 + M(t)) - t.$$

Also gilt für alle $t \in (0, \infty)$

$$\frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t},$$

und es folgt

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \geq \frac{1}{\mu}.$$

Nun sei $c \in (0, \infty)$ beliebig. Wir definieren die Folge $(W_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$W_n^{(c)} := W_n \wedge c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind die Zufallsvariablen $(W_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ ebenfalls unabhängig und identisch verteilt, und es gilt

$$W_n^{(c)} \leq W_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin definieren wir die Folge $(T_n^{(c)})_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch $T_0^{(c)} := 0$ und

$$T_n^{(c)} := \sum_{i=1}^{n} W_i^{(c)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$T_n^{(c)} \leq T_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Nun definieren wir den zugehörigen Erneuerungsprozess N^c durch

$$N_t^{(c)} := \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{1}_{\{T_k^{(c)} \leq t < T_{k+1}^{(c)}\}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt

$$N_t \leq N_t^{(c)} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

In der Tat, für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Lemma 1.1.5

$$\{N_t = k\} = \{T_k \leq t < T_{k+1}\} \subset \{T_k^{(c)} \leq t\} = \{N_t^{(c)} \geq k\}.$$

Nun sei $M^{(c)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ die zugehörige Erneuerungsfunktion

$$M^{(c)}(t) := \mathbb{E}[N_t^{(c)}], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt

$$M(t) \leq M^{(c)}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Weiterhin setzen wir $\mu^{(c)} := \mathbb{E}[W_1^{(c)}]$. Dann gilt

$$0 \leq \mu^{(c)} \leq \mu.$$

Wir definieren die restliche Lebensdauer

$$R_t^{(c)} := T^{(c)}_{N_t^{(c)}+1} - t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt

$$R_t^{(c)} \leq c \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Satz 1.1.25(b) gilt außerdem

$$\mathbb{E}[R_t^{(c)}] = \mu^{(c)}(1 + M^{(c)}(t)) - t \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Also erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$t + c \geq \mathbb{E}[t + R_t^{(c)}] = t + \mathbb{E}[R_t^{(c)}] = \mu^{(c)}(1 + M^{(c)}(t)).$$

Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$M(t) \leq M^{(c)}(t) \leq \frac{t+c}{\mu^{(c)}} - 1.$$

Also gilt für alle $c \in (0, \infty)$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^{(c)}}.$$

Es gilt $W_1^{(c)} \uparrow W_1$ für $c \uparrow \infty$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mu = \mathbb{E}[W_1] = \mathbb{E}\Big[\lim_{c\uparrow\infty} W_1^{(c)}\Big] = \lim_{c\uparrow\infty} \mathbb{E}[W_1^{(c)}] = \lim_{c\uparrow\infty} \mu^{(c)}.$$

Es gilt also $\mu^{(c)} \uparrow \mu$ für $c \uparrow \infty$, und wir erhalten

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu}.$$

Insgesamt haben wir gezeigt

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t},$$

und es folgt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

□

Definition 1.1.28. *Wir nennen die Zahl*

$$\lambda := \frac{1}{\mu} \in (0, \infty)$$

die Intensität des Erneuerungsprozesses N.

Bemerkung 1.1.29. *Nach dem elementaren Erneuerungssatz (Satz 1.1.27) gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \lambda.$$

Satz 1.1.30 (Starkes Gesetz der großen Zahlen für Erneuerungsprozesse)**.** *Es gilt $\mathbb{P}$-fast sicher*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Beweis. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i = \mathbb{E}[W_1] = \frac{1}{\lambda}.$$

Nach Lemma 1.1.5(a) gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N_t \geq k) = \mathbb{P}(T_k \leq t) \to 1 \quad \text{für } t \to \infty.$$

Da die Pfade von N monoton wachsend sind, folgt $N_t \xrightarrow{\text{f.s.}} \infty$ für $t \to \infty$. Also folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t}}{N_t} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$ fast sicher, und daher

$$\frac{T_{N_t}}{N_t}\frac{N_t}{N_t+1} \leq \frac{t}{N_t+1} \leq \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \quad \text{fast sicher.}$$

Außerdem gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t}}{N_t}\frac{N_t}{N_t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} = \frac{1}{\lambda},$$

und daher $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{N_t+1} = \frac{1}{\lambda}.$$

Nun folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

□

1.2 Das Sparre-Andersen-Modell

Es sei N eine Erneuerungsprozess mit Intensität λ zur Erneuerungsfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit zugehöriger Folge $(W_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $G : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $G(0) = 0$. Weiterhin sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$. Wir nehmen an, dass die Folgen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig sind. Wir setzen

$$\mu := \mathbb{E}[X_1] \in (0,\infty).$$

Wir definieren $\bar{F} : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$\bar{F}(x) := 1 - F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.2.1. *Es gilt*

$$\mu = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 1.3.6 weiter unten. □

Definition 1.2.2. *Wir nennen den Prozess*

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

den Gesamtschadenprozess.

Definition 1.2.3. *Wir nennen das vorliegende Modell für den Gesamtschaden das Sparre-Andersen-Modell.*

Definition 1.2.4. *Ist N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ, das heißt $W_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sprechen wir vom Cramér-Lundberg-Modell.*

Definition 1.2.5. *Jede deterministische, monoton wachsende Funktion $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $P_0 = 0$ nennen wir einen Prämienprozess.*

Im Folgenden fixieren wir den Prämienprozess

$$P_t = ct, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

für ein $c > 0$.

Definition 1.2.6. *Wir nennen c die Prämienrate.*

Definition 1.2.7. *Für jedes $u \in \mathbb{R}_+$ nennen wir den Prozess*

$$R = R(u) := u + P - S_N$$

einen Risikoprozess mit Anfangsrisikoreserve (oder Startkapital) u.

Bemerkung 1.2.8. *Es gilt $R(u+v) = u + R(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}_+$.*

Definition 1.2.9.

(a) Wir nennen

$$\tau : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to [0, \infty], \quad \tau(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : R_t(u) < 0\}$$

die Ruinzeiten.

(b) Wir nennen

$$\Psi : \mathbb{R}_+ \to [0, 1], \quad \Psi(u) := \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$$

die Ruinwahrscheinlichkeiten.

(c) Wir nennen

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1], \quad \Phi(u) := 1 - \Psi(u)$$

die Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Lemma 1.2.10. *Die Funktion Φ ist monoton wachsend. Folglich ist Ψ monoton fallend.*

Beweis. Für alle $u \leq v$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) = \infty) &= \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{R_t(u) \geq 0\}\bigg) \\ &\leq \mathbb{P}\bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{R_t(v) \geq 0\}\bigg) = \mathbb{P}(\tau(v) = \infty) = \Phi(v).\end{aligned}$$

□

Satz 1.2.11. *Für alle $u \in \mathbb{R}_+$ gilt $\mathbb{P}$-fast sicher*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R_t(u)}{t} = c - \lambda\mu.$$

Beweis. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i = \mathbb{E}[X_1] = \mu.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen für Erneuerungsprozesse (Satz 1.1.30) gilt außerdem $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Es folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} \frac{N_t}{t} = \lambda\mu.$$

Also folgt insgesamt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R_t(u)}{t} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{u + ct}{t} - \frac{S_{N_t}}{t} \right) = c - \lambda\mu.$$

□

Satz 1.2.12. *Falls $c < \lambda\mu$, dann gilt $\Phi(u) = 0$ und $\Psi(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Nach Satz 1.2.11 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t(u)}{t} = c - \lambda\mu < 0,$$

und daher gilt für alle $u \in \mathbb{R}_+$

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \mathbb{P}\bigg(\bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \{R_t(u) < 0\} \bigg) = 1.$$

□

Definition 1.2.13. *Die Zahl*

$$\rho := \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

heißt relativer Sicherheitszuschlag (englisch safety loading).

Definition 1.2.14. *Falls $\rho > 0$, was gleichbedeutend mit $c > \lambda\mu$ ist, so sagen wir, dass die Nettogewinnbedingung (englisch net profit condition) erfüllt ist.*

Definition 1.2.15. *Im Fall $\rho > 0$ setzen wir*

$$\sigma := \frac{1}{1+\rho}.$$

Bemerkung 1.2.16. *Im Fall $\rho > 0$ gilt $\sigma \in (0,1)$ und*

$$\sigma = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Satz 1.2.17. *Falls $\rho > 0$, so ist Φ monoton wachsend mit $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$. Folglich ist Ψ monoton fallend mit $\lim_{u\to\infty} \Psi(u) = 0$.*

Beweis. Die Monotonie hatten wir bereits in Lemma 1.2.10 gesehen. Nach Satz 1.2.11 existiert eine Zufallsvariable Y, so dass $\mathbb{P}$-fast sicher gilt

$$R_t(0) \geq Y \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Wegen $R_t(u) = u + R_t(0)$ folgt $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$. □

Satz 1.2.18. *Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ erfüllt die Integralgleichung*

$$\Phi(u) = \int_{(0,\infty)} \bigg(\int_{(0,u+cw]} \Phi(u + cw - x) F(dx) \bigg) (\mathbb{P} \circ W_1)(dw), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Wir vereinbaren die Notation $\mathbb{X} = (X_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{X}_2 = (X_n)_{n\geq 2}$, $\mathbb{W} = (W_n)_{n\geq 1}$ und $\mathbb{W}_2 = (W_n)_{n\geq 2}$. Nach Lemma 1.1.5(b) und dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\{R_t(u)\geq 0\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\big(\{R_t(u)\geq 0\}\cup\{t<W_1\}\big)\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\Big(\Big\{u+ct-\sum_{i=1}^{N_t}X_i\geq 0\Big\}\cup\{t<W_1\}\Big)\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\Big(\Big\{u+cW_1-X_1+c(t-W_1)-\sum_{i=2}^{N_t}X_i\geq 0\Big\}\cup\{t<W_1\}\Big)\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k=2}^{\infty}\Big(\Big\{u+cW_1-X_1+c(t-W_1)-\sum_{i=2}^{k}X_i\geq 0\Big\}\\
&\qquad\qquad\cap\{W_1+\ldots+W_k\leq t<W_1+\ldots+W_{k+1}\}\Big)\cup\{t<W_1\}\Big)\\
&= \int_{\mathbb{R}^\infty}\int_{\mathbb{R}^\infty}\mathbb{1}\Big\{\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k=2}^{\infty}\Big(\Big\{u+cw_1-x_1+c(t-w_1)-\sum_{i=2}^{k}x_i\geq 0\Big\}\\
&\qquad\cap\{w_1+\ldots+w_k\leq t<w_1+\ldots+w_{k+1}\}\Big)\cup\{t<w_1\}\Big\}(\mathbb{P}\circ\mathbb{X})(dx)(\mathbb{P}\circ\mathbb{W})(dw)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^\infty}\int_{\mathbb{R}^\infty}\mathbb{1}\Big\{\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k=2}^{\infty}\Big(\Big\{u+cw_1-x_1+c(t-w_1)-\sum_{i=2}^{k}x_i\geq 0\Big\}\\
&\qquad\cap\{w_1+\ldots+w_k\leq t<w_1+\ldots+w_{k+1}\}\Big)\cup\{t<w_1\}\Big\}(\mathbb{P}\circ(\mathbb{X}_2,\mathbb{W}_2))(dx,dw)\Big)\\
&\qquad\qquad(\mathbb{P}\circ(X_1,W_1))(dx_1,dw_1)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k=2}^{\infty}\Big(\Big\{u+cw-x+c(t-w)-\sum_{i=2}^{k}X_i\geq 0\Big\}\\
&\qquad\cap\{w+W_2+\ldots+W_k\leq t<w+W_2+\ldots+W_{k+1}\}\Big)\cup\{t<w\}\Big)\\
&\qquad\qquad d(\mathbb{P}\circ(X_1,W_1))(x,w)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}_+}\bigcup_{k=2}^{\infty}\Big(\Big\{u+cw-x+c(t-w)-\sum_{i=1}^{k-1}X_i\geq 0\Big\}\\
&\qquad\cap\{W_1+\ldots+W_{k-1}\leq t-w<W_1+\ldots+W_k\}\Big)\cup\{t<w\}\Big)\\
&\qquad\qquad d(\mathbb{P}\circ(X_1,W_1))(x,w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in [w,\infty) \cap \mathbb{Q}_+} \bigcup_{k=2}^{\infty} \Big\{ u + cw - x + c(t-w) - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \geq 0 \Big\} \\
&\qquad \cap \{ W_1 + \ldots + W_{k-1} \leq t - w < W_1 + \ldots + W_k \} \Bigg) d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \bigcup_{k=2}^{\infty} \Big\{ u + cw - x + ct - \sum_{i=1}^{k-1} X_i \geq 0 \Big\} \\
&\qquad\quad \cap \{ W_1 + \ldots + W_{k-1} \leq t < W_1 + \ldots + W_k \} \Bigg) d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \Big\{ u + cw - x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \geq 0 \Big\} d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{ R_t(u + cw - x) \geq 0 \} \Bigg) d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(u + cw - x) d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w),
\end{aligned}$$

wobei wir die Notation $\Phi(u) := 0$ für alle $u < 0$ benutzen. Nun folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(u + cw - x) d(\mathbb{P} \circ (X_1, W_1))(x,w) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Bigg(\int_{\mathbb{R}} \Phi(u + cw - x)(\mathbb{P} \circ X_1)(dx) \Bigg) (\mathbb{P} \circ W_1)(dw) \\
&= \int_{(0,\infty)} \Bigg(\int_{(0,u+cw]} \Phi(u + cw - x) F(dx) \Bigg) (\mathbb{P} \circ W_1)(dw).
\end{aligned}$$

$\square$

Definition 1.2.19. *Es sei J ein Intervall. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt absolutstetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in J$ und $b_1, \ldots, b_n \in J$ mit $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$ und*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon.$$

Bemerkung 1.2.20.

(a) *Jede Lipschitz-stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist absolutstetig.*

(b) *Jede absolutstetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.*

Beweis.

(a) Es existiert ein $L \in (0, \infty)$, so dass

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \quad \text{für alle } a, b \in J.$$

Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta := \frac{\epsilon}{L}$. Aus

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

folgt dann

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} L(b_k - a_k) = L \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < L\delta = \epsilon.$$

(b) Zu $\epsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ wie in Definition 1.2.19. Es seien $a, b \in J$ mit $a < b$, so dass

$$b - a < \delta.$$

Dann folgt

$$|f(b) - f(a)| < \epsilon.$$

□

Satz 1.2.21 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Es sei J ein Intervall.*

(a) *Ist $f : J \to \mathbb{R}$ absolutstetig, so existiert die Ableitung f' fast überall, f' ist auf kompakten Teilintervallen von J integrierbar, und es gilt*

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(x) dx \quad \textit{für alle } s, t \in J.$$

(b) *Es sei $g : J \to \mathbb{R}$ auf kompakten Teilintervallen integrierbar, und es sei $a \in J$ beliebig. Dann ist die Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(t) := \int_a^t g(x)dx$$

absolutstetig, die Ableitung f' existiert fast überall, und es gilt $f' = g$ fast überall.

Satz 1.2.22 (Partielle Integration)**.** *Es seien $X, Y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ càdlàg-Funktionen von lokal beschränkter Variation.*

(a) *Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$ gilt*

$$\int_{(a,b]} Y(s)\, X(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(s-)\, Y(ds).$$

(b) *Ist X oder Y stetig, dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$*

$$\int_{(a,b]} Y(s)\, X(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(s)\, Y(ds).$$

Beweis.

(a) Es seien $X = X^+ - X^-$ und $Y = Y^+ - Y^-$ Zerlegungen mit monoton wachsenden càdlàg-Funktionen X^+, X^- und Y^+, Y^-. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{(a,b]} Y(s)\, X(ds) &= \int_{(a,b]} Y^+(s)\, X^+(ds) - \int_{(a,b]} Y^-(s)\, X^+(ds)\\ &\quad - \int_{(a,b]} Y^+(s)\, X^-(ds) + \int_{(a,b]} Y^-(s)\, X^-(ds)\end{aligned}$$

und

$$X(b)Y(b) = X^+(b)Y^+(b) - X^-(b)Y^+(b) - X^+(b)Y^-(b) + X^-(b)Y^-(b)$$

und

$$X(a)Y(a) = X^+(a)Y^+(a) - X^-(a)Y^+(a) - X^+(a)Y^-(a) + X^-(a)Y^-(a)$$

und

$$\begin{aligned}\int_{(a,b]} X(s-)\, Y(ds) &= \int_{(a,b]} X^+(s-)\, Y^+(ds) - \int_{(a,b]} X^-(s-)\, Y^+(ds)\\ &\quad - \int_{(a,b]} X^+(s-)\, Y^-(ds) + \int_{(a,b]} Y^-(s-)\, X^-(ds).\end{aligned}$$

Also dürfen wir annehmen, dass X und Y monoton wachsend sind. Es seien m_X und m_Y die zugehörigen Maße. Dann gilt

$$Y(t) = m_Y(t)([0,t]) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+$$

und

$$m_Y([s,t]) = Y(t) - Y(s-) \quad \text{für alle } s,t \in (0,\infty) \text{ mit } s < t.$$

Dashalb gilt nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
&\int_{(a,b]} Y(s)\,X(ds) = \int_{(a,b]} \Big(\int_{[0,s]} m_Y(du) \Big) m_X(ds) \\
&= \int_{[0,a]} \Big(\int_{(a,b]} m_X(ds) \Big) m_Y(du) + \int_{(a,b]} \Big(\int_{[u,b]} m_X(ds) \Big) m_Y(du) \\
&= (X(b) - X(a))Y(a) + \int_{(a,b]} (X(b) - X(u-))Y(du) \\
&= (X(b) - X(a))Y(a) + X(b)(Y(b) - Y(a)) - \int_{(a,b]} X(u-)Y(du) \\
&= X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(u-)Y(du).
\end{aligned}$$

(b) Nach Teil (a) gilt auch

$$\int_{(a,b]} X(s)\,Y(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} Y(s-)\,X(ds),$$

und daher

$$\int_{(a,b]} Y(s-)\,X(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(s)\,Y(ds).$$

Also gilt die behauptete Formel, sofern X oder Y stetig ist.

□

Von nun an betrachten wir das Cramér-Lundberg-Modell.

Satz 1.2.23.

(a) Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ ist absolutstetig, und erfüllt fast überall die Differentialgleichung

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u]} \Phi(u-x)F(dx), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ *erfüllt die Integralgleichung*

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis.

(a) Nach Satz 1.2.18 und mit der Substitution

$$y = \varphi(w) = u + cw$$

gilt für jedes $u \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,u+cw]} \Phi(u+cw-x)F(dx) \right) (\mathbb{P} \circ W_1)(dw) \\
&= \int_0^\infty \int_{(0,u+cw]} \Phi(u+cw-x)F(dx)\lambda e^{-\lambda w} dw \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \exp\left(-\frac{\lambda(y-u)}{c} \right) \int_{(0,y]} \Phi(y-x)F(dx)dy \\
&= \frac{\lambda}{c} \exp\left(\frac{\lambda u}{c} \right) \int_u^\infty \exp\left(-\frac{\lambda y}{c} \right) \int_{(0,y]} \Phi(y-x)F(dx)dy.
\end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.21(b) und der Produktregel ist Φ absolutstetig, und die Ableitung Φ' existiert fast überall mit

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u]} \Phi(u-x)F(dx), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Mit partieller Integration (Satz 1.2.22(b)) gilt für jedes $u \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\int_{(0,u]} \Phi(u-x)\bar{F}(dx) &= \Phi(0)\bar{F}(u) - \Phi(u)\bar{F}(0) - \int_{(0,u]} \bar{F}(u)(\Phi(u-\bullet))(dx) \\
&= \Phi(0)\bar{F}(u) - \Phi(u) + \int_0^u \Phi'(u-x)\bar{F}(x)dx.
\end{aligned}$$

Nun sei $t \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Integration von 0 bis t ergibt also nach Satz 1.2.21(a) und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\Phi(t)-\Phi(0) &= \int_0^t \Phi'(u)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_{(0,u]} \Phi(u-x)F(dx)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \int_{(0,u]} \Phi(u-x)\bar{F}(dx)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Phi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Big(\Phi(0)\bar{F}(u) - \Phi(u) + \int_0^u \Phi'(u-x)\bar{F}(x)dx\Big)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(0)\int_0^t \bar{F}(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \Big(\int_0^u \Phi'(u-x)\bar{F}(x)dx\Big)du \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(0)\int_0^t \bar{F}(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(x)\Big(\int_x^t \Phi'(u-x)du\Big)dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(0)\int_0^t \bar{F}(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^t \bar{F}(x)\big(\Phi(t-x)-\Phi(0)\big)dx.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

□

Satz 1.2.24.

(a) *Falls* $\rho > 0$*, dann gilt* $\Phi(0) = 1-\sigma$ *und* $\Psi(0) = \sigma$*.*

(b) *Falls* $\rho \leq 0$*, dann gilt* $\Phi(u) = 0$ *und* $\Psi(u) = 1$ *für alle* $u \in \mathbb{R}_+$*.*

Beweis.

(a) Nach Satz 1.2.17 ist Φ monoton wachsend mit $\lim_{u\to\infty}\Phi(u) = 1$. Nach Satz 1.2.23(b) gilt

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \Phi(u-x)\mathbb{1}_{(0,u]}(x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, Lemma 1.2.1 und Bemerkung 1.2.16 folgt

$$\begin{aligned}
1 = \lim_{u\to\infty}\Phi(u) &= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \lim_{u\to\infty}\Phi(u-x)\mathbb{1}_{(0,u]}(x)\bar{F}(x)dx \\
&= \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(x)dx = \Phi(0) + \frac{\lambda\mu}{c} = \Phi(0)+\sigma,
\end{aligned}$$

und daher

$$\Phi(0) = 1 - \sigma.$$

(b) Falls $\rho < 0$, so folgt dies aus Satz 1.2.12. Nun betrachten wir den Fall $\rho = 0$. In diesem Fall gilt

$$\frac{c}{\lambda\mu} = 1, \quad \text{und daher} \quad \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{\mu},$$

und mit Satz 1.2.23(b) folgt

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{1}{\mu}\int_{(0,u]} \Phi(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Es sei $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Funktion gegeben durch $G(x) = 0$ für alle $x < 0$ und

$$G(x) := \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(x)dx.$$

Nach Lemma 1.2.1 gilt $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1$, und somit ist G eine Verteilungsfunktion. Die Integralgleichung besagt nun

$$\Phi = \Phi(0) + \Phi * G.$$

Nach Satz 1.1.21 gilt also

$$\Phi = \Phi(0) + \Phi(0) * M,$$

wobei M die zu G gehörige Erneuerungsfunktion bezeichnet. Also gilt

$$\Phi(t) = \Phi(0)(1 + M(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Satz 1.1.12(b) gilt $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Da $\Phi(t) \in [0,1]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, folgt $\Phi(0) = 0$, und damit auch $\Phi(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

□

Beispiel 1.2.25. *Falls $\rho > 0$ und $X_1 \sim \operatorname{Exp}(1/\mu)$, dann gilt*

$$\Psi(u) = \sigma \exp\left(- \frac{1-\sigma}{\mu} u \right), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Die Zufallsvariable X_1 ist absolutstetig mit Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\mu} \exp\left(- \frac{x}{\mu} \right), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Mit Satz 1.2.23(a) folgt

$$\begin{aligned}
\Phi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_{(0,u]} \Phi(u-x) F(dx) \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \Phi(u-x) \exp\left(- \frac{x}{\mu} \right) dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \int_0^u \Phi(x) \exp\left(- \frac{u-x}{\mu} \right) dx.
\end{aligned}$$

Wir können dies auch schreiben als

$$\Phi'(u) = \frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \exp\left(- \frac{u}{\mu} \right) \int_0^u \Phi(x) \exp\left(\frac{x}{\mu} \right) dx.$$

Ableiten nach der Produktregel und Umstellen der vorherigen Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
\Phi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{c\mu} \left(\Phi(u) - \frac{1}{\mu} \int_0^u \Phi(x) \exp\left(- \frac{u-x}{\mu} \right) dx \right) \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u) + \frac{\lambda}{c\mu^2} \int_0^u \Phi(x) \exp\left(- \frac{u-x}{\mu} \right) dx \\
&= \frac{\lambda}{c}\Phi'(u) - \frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u) + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\lambda}{c}\Phi(u) - \Phi'(u) \right) \\
&= \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} \right) \Phi'(u) = - \frac{1-\sigma}{\mu} \Phi'(u).
\end{aligned}$$

Also existieren Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, so dass

$$\Phi(u) = c_1 - c_2 \exp\left(- \frac{1-\sigma}{\mu} u \right), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Satz 1.2.24(a) gilt $\Phi(0) = 1 - \sigma$, und nach Satz 1.2.17 gilt $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$. Also folgt $c_1 = 1$ und $c_2 = \sigma$, und daher

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u) = \sigma \exp\left(- \frac{1-\sigma}{\mu} u \right), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

□

1.3 Light- und heavy tails

Definition 1.3.1. *Eine Zufallsvariable $X \geq 0$ (oder deren Verteilungsfunktion F bzw. dessen Verteilung $\mathbb{P} \circ X$) heißt light-tailed, wenn ein $\lambda > 0$ mit $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] < \infty$ existiert; und andernfalls, also wenn $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \infty$ für alle $\lambda > 0$, heißt sie heavy-tailed.*

Definition 1.3.2. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{K}$ die Klasse aller Verteilungsfunktionen, die heavy-tailed sind.*

Lemma 1.3.3. *Gilt für eine Zufallsvariable $X \geq 0$, dass $\mathbb{E}[X^n] = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist X heavy-tailed.*

Beweis. Es sei $\lambda > 0$ beliebig. Wegen

$$e^{\lambda X} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda X)^k}{k!}$$

gilt

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] \geq \mathbb{E}\left[\frac{(\lambda X)^n}{n!}\right] = \frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{E}[X^n] = \infty.$$

$\square$

Beispiel 1.3.4. *Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ ist light-tailed, denn es gilt*

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \left(\frac{\beta}{\beta - \lambda}\right)^{\alpha} \quad \textit{für alle } \lambda \in (-\infty, \beta).$$

Beispiele 1.3.5. *Einige Beispiele für Verteilungen, die heavy-tailed sind:*

(a) *Die Weibull-Verteilung $\mathrm{WB}(c, \tau)$ mit Parametern $c, \tau > 0$. Für dessen Verteilungsfunktion gilt*

$$\bar{F}(x) = e^{-cx^{\tau}}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

(b) *Die Log-Normalverteilung $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$.*

(c) *Die Log-Gammaverteilung $\mathrm{L}\Gamma(\alpha, \beta)$ mit Parametern $\alpha, \beta > 0$.*

(d) *Die Burr-Verteilung $\mathrm{Burr}(\alpha, \tau, \sigma)$ mit Parametern $\alpha, \tau, \sigma > 0$.*

(e) *Die Pareto-Verteilung (Typ I) $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ mit Parametern $\kappa, \alpha > 0$. Für dessen Verteilungsfunktion gilt*

$$\bar{F}(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,\kappa)}(x) + \left(\frac{\kappa}{x}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lemma 1.3.6. *Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$, und es sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine absolutstetige Funktion mit $\varphi' \geq 0$ fast überall. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \varphi(0) + \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx.$$

Beweis. Mit Satz 1.2.21(a) und dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X)] &= \mathbb{E}\left[\varphi(0) + \int_0^X \varphi'(x)dx\right] = \varphi(0) + \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \varphi'(x)\mathbb{1}_{\{X>x\}}dx\right] \\ &= \varphi(0) + \int_0^\infty \varphi'(x)\mathbb{P}(X > x)dx = \varphi(0) + \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx.\end{aligned}$$

□

Satz 1.3.7. *Für eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $F \in \mathscr{K}$.

(ii) Für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) > 0.$$

(iii) Für alle $\lambda > 0$ gilt

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = \infty.$$

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (ii): ✓
(ii) $\Rightarrow$ (i): Angenommen, es gilt $F \notin \mathscr{K}$. Dann existiert ein $\lambda > 0$ mit $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] < \infty$. Mit [Tap19, Lemma 3.2.26] folgt für jedes $x \in \mathbb{R}_+$

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} > e^{\lambda x}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda X}]}{e^{\lambda x}},$$

und daher

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} e^{\lambda x}\bar{F}(x) \leq \mathbb{E}[e^{\lambda X}] < \infty.$$

Also folgt der Widerspruch

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{\lambda}{2}x}\bar{F}(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{2}x}\big(e^{\lambda x}\bar{F}(x)\big) = 0.$$

(i) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen, es existiert ein $\lambda > 0$ mit

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) < \infty.$$

Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\bar{F}(x) \leq Ce^{-\lambda x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Also folgt mit Lemma 1.3.6 der Widerspruch

$$\mathbb{E}[e^{\frac{\lambda}{2}X}] = 1 + \int_0^\infty \frac{\lambda}{2} e^{\frac{\lambda}{2}x}\bar{F}(x)dx \leq 1 + \frac{\lambda C}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{2}x}dx < \infty.$$

□

Korollar 1.3.8. *Für eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $F \notin \mathscr{K}$.

(ii) Es existiert ein $\lambda > 0$ mit

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = 0.$$

Beweis. Folgt aus Satz 1.3.7. □

Beispiel 1.3.9. *Es gilt* $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha) \in \mathscr{K}$ *für alle $\kappa, \alpha > 0$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.3.7, denn für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\left(\frac{\kappa}{x}\right)^\alpha = \infty.$$

□

Beispiel 1.3.10. *Es* $\mathrm{WB}(c, \tau) \in \mathscr{K}$ *für alle $c > 0$ und $\tau \in (0,1)$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 1.3.7, denn für jedes $\lambda > 0$ gilt

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}e^{-cx^\tau} = \limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x - cx^\tau} = \infty.$$

□

Beispiel 1.3.11. *Es gilt* $\mathrm{Exp}(\beta) \notin \mathscr{K}$ *für alle $\beta > 0$.*

Beweis. Es gilt $\bar{F}(x) = e^{-\beta x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Mit $\lambda = \frac{\beta}{2}$ folgt also

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lambda x}\bar{F}(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{\beta}{2}x} = 0.$$

Also folgt mit Korollar 1.3.8, dass $\operatorname{Exp}(\beta) \notin \mathscr{K}$. $\square$

Die Ratenfunktion $I_X : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ einer Zufallsvariablen X ist bekanntlich definiert durch

$$I_X(b) := \sup_{s\geq 0}\big(sb - \Lambda_X(s)\big), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Hierbei ist $\Lambda_X : \mathbb{R} \to (-\infty,\infty]$ definiert durch

$$\Lambda_X(s) := \ln \mathbb{E}[e^{sX}], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Satz 1.3.12. *Es sei $X \geq 0$ eine Zufallsvariable.*

(a) Falls X heavy-tailed ist, dann gilt $I_X(b) = 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$.

(b) Falls X light-tailed ist, dann existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $I_X(b) > 0$.

Beweis.

(a) Es gilt $\Lambda_X(s) = \infty$ für alle $s \in (0,\infty)$, und daher $I_X(b) = 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$.

(b) Es existiert ein $s \in (0,\infty)$, so dass $\Lambda_X(s) < \infty$. Weiterhin existiert ein $b \in (0,\infty)$, so dass

$$sb - \Lambda_X(s) > 0,$$

und daher gilt $I_X(b) > 0$.

$\square$

Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$. Wir erinnern an die Definition

$$t_{\max} := \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : F(t) < 1\} = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : \bar{F}(t) > 0\} \in (0,\infty].$$

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gilt $t_{\max} = \infty$.

(ii) Es gilt $F(t) < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Es gilt $\bar{F}(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Definition 1.3.13. *Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$. Die Funktion $e_F : [0, t_{\max}) \to [0, \infty]$ gegeben durch*

$$e_F(u) := \mathbb{E}[X - u \,|\, X > u], \quad u \in [0, t_{\max})$$

heißt mean excess over threshold oder restliche Lebenserwartung.

Lemma 1.3.14. *Es gilt*

$$e_F(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x)dx \quad \textit{für alle } u \in [0, t_{\max}).$$

Beweis. Wir fixieren ein beliebiges $u \in [0, t_{\max})$ und definieren die Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\varphi(x) = (x - u)^+, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt $\varphi(0) = 0$, die Funktion φ ist absolutstetig, und es gilt fast überall

$$\varphi'(x) = \mathbb{1}_{\{x>u\}}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Insbesondere gilt $\varphi' \geq 0$ fast überall. Außerdem gilt $\mathbb{P}^{\{X>u\}} \ll \mathbb{P}$ mit

$$\frac{d\mathbb{P}^{\{X>u\}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{1}_{\{X>u\}}}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{\mathbb{1}_{\{X>u\}}}{\bar{F}(u)}.$$

Also folgt mit Lemma 1.3.6

$$\begin{aligned} e_F(u) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\{X>u\}}}[X - u] = \frac{1}{\bar{F}(u)}\mathbb{E}[(X-u)\mathbb{1}_{\{X>u\}}] = \frac{1}{\bar{F}(u)}\mathbb{E}[(X-u)^+] \\ &= \frac{1}{\bar{F}(u)}\mathbb{E}[\varphi(X)] = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx \\ &= \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x>u\}}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x)dx. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3.15. *Falls $X \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$, dann gilt*

$$e_F(u) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Wegen $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ gilt nach Lemma 1.3.14

$$e_F(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x)dx = e^{\lambda u} \int_u^\infty e^{-\lambda x}dx = e^{\lambda u}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u} = \frac{1}{\lambda}.$$

□

Satz 1.3.16. *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$.*

(a) Ist $t_{\max} < \infty$, so gilt $F \notin \mathscr{K}$ und

$$e_F(u) \le t_{\max} - u < \infty \quad \textit{für alle } u \in [0, t_{\max}).$$

(b) Ist $\mathbb{E}[X] = \infty$, so gilt $F \in \mathscr{K}$ und $t_{\max} = \infty$ sowie

$$e_F(u) = \infty \quad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

(c) Ist $t_{\max} = \infty$ und $\mathbb{E}[X] < \infty$, so gilt

$$e_F(u) < \infty \quad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis.

(a) Es gilt $\bar{F}(x) = 0$ für alle $x \in [t_{\max}, \infty)$. Also folgt mit Korollar 1.3.8, dass $F \notin \mathscr{K}$. Wegen $X \le t_{\max}$ gilt außerdem

$$e_F(u) = \mathbb{E}[X - u \,|\, X > u] \le t_{\max} - u \quad \text{für alle } u \in [0, t_{\max}).$$

(b) Nach Lemma 1.3.3 gilt $F \in \mathscr{K}$. Außerdem gilt $t_{\max} = \infty$, denn andernfalls folgt wegen $X \le t_{\max}$ der Widerspruch $\mathbb{E}[X] < \infty$. Nach Lemma 1.2.1 gilt

$$\int_0^\infty \bar{F}(x)dx = \mathbb{E}[X] = \infty,$$

und daher

$$\int_u^\infty \bar{F}(x)dx = \infty \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

Also folgt mit Lemma 1.3.14

$$e_F(u) = \infty \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

(c) Für alle $u \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\int_u^\infty \bar{F}(x)dx \le \int_0^\infty \bar{F}(x)dx = \mathbb{E}[X] < \infty.$$

Also folgt mit Lemma 1.3.14

$$e_F(u) < \infty \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

□

Satz 1.3.17. *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$ und $t_{\max} = \infty$.*

(a) Falls $\lim_{u\to\infty} e_F(u) = \infty$, dann gilt $F \in \mathscr{K}$.

(b) Falls $\limsup_{u\to\infty} e_F(u) < \infty$, dann gilt $F \notin \mathscr{K}$.

Beweis. Siehe [BOS17, Prop. 5.52]. □

Definition 1.3.18. *Eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$ und $t_{\max} = \infty$ heißt subexponentiell, falls*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(t)}{\bar{F}(t)} = n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Definition 1.3.19. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}$ die Klasse aller subexponentiellen Verteilungsfunktionen.*

Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schreiben wir

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{für } x \to \infty,$$

oder auch kurz $f \sim g$, falls

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Bemerkung 1.3.20. *Für eine Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$ und $t_{\max} = \infty$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $F \in \mathscr{S}$.

(ii) Es gilt $\overline{F^{*n}} \sim n\bar{F}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1.3.21. *Es sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$ und $t_{\max} = \infty$. Weiterhin sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Wir definieren die Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch*

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{und} \quad M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es gilt* $F \in \mathscr{S}$.

(ii) *Es gilt* $\bar{F}_{S_n} \sim \bar{F}_{M_n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt

$$\bar{F}_{S_n}(x) = \mathbb{P}(S_n > x) = \overline{F^{*n}}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+.$$

Wegen der geometrischen Summe gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} y^k = \frac{1-y^n}{1-y} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Außerdem gilt

$$\lim_{x\to\infty} F(x)^k = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \bar{F}_{M_n}(x) &= \mathbb{P}(M_n > x) = 1 - \mathbb{P}(M_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x) = 1 - F(x)^n = \bar{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F(x)^k \sim n\bar{F}(x) \quad \text{für } x \to \infty. \end{aligned}$$

Also folgt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) mit Bemerkung 1.3.20. □

Satz 1.3.22. *Es gilt* $\mathscr{S} \subset \mathscr{K}$.

Beweis. Dies folgt aus [BOS17, Prop. 5.56]. □

Definition 1.3.23. *Eine Funktion* $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *heißt langsam variierend, falls*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad \textit{für alle } t > 0.$$

Definition 1.3.24. *Wir bezeichnen mit* $\mathscr{R}_0$ *die Klasse aller langsam variierenden Funktionen.*

Beispiele 1.3.25. *Es gilt* $\ln, \ln \circ \ln, \frac{1}{\ln} \in \mathscr{R}_0$ *und* $c \in \mathscr{R}_0$ *für jedes* $c \in \mathbb{R}$.

Definition 1.3.26. *Eine Funktion* $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *heißt regulär variierend vom Index* $\alpha \in \mathbb{R}$, *falls*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{H(tx)}{H(x)} = t^\alpha \quad \textit{für alle } t > 0.$$

Definition 1.3.27. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}_\alpha$ die Klasse aller regulär variierenden Funktionen.*

Beispiel 1.3.28. *Ist p ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$, so gilt $p \in \mathscr{R}_n$.*

Bemerkung 1.3.29. *Für eine Funktion $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und einen Index $\alpha \in \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $H \in \mathscr{R}_\alpha$.

(ii) Es gilt $L \in \mathscr{R}_0$, wobei $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definiert ist durch

$$L(x) := \frac{H(x)}{x^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Definition 1.3.30. *Wir bezeichnen mit $\mathscr{R}$ die Klasse aller Verteilungsfunktionen F mit $F(0) = 0$, für die $\bar{F}$ regulär variierend mit einem Index $-\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist. Mit anderen Worten, die Funktion $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$L(x) := x^\alpha \bar{F}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

ist langsam variierend.

Beispiel 1.3.31. *Es gilt* $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha) \in \mathscr{R}$ *für alle* $\kappa, \alpha > 0$.

Beweis. Es gilt $F(0) = 0$ und

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{x}\right)^\alpha \quad \text{für alle } x \geq \kappa.$$

Für die Funktion $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(x) = x^\alpha \bar{F}(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

gilt

$$L(x) = \kappa^\alpha \quad \text{für alle } x \geq \kappa.$$

Also gilt $L \in \mathscr{R}_0$, und es folgt $F \in \mathscr{R}$. □

Satz 1.3.32. *Es gilt $\mathscr{R} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{K}$.*

Beweis. Die Inklusion $\mathscr{S} \subset \mathscr{K}$ folgt aus Satz 1.3.22, und die Inklusion $\mathscr{R} \subset \mathscr{S}$ folgt aus [BOS17, Prop. 5.61]. □

Satz 1.3.33. *Für jedes $F \in \mathscr{S}$ und jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $K \in (0, \infty)$, so dass*

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}_+ \textit{ und alle } n \geq 2.$$

Beweis. Siehe [BOS17, Prop. 5.63]. □

1.4 Asymptotik der Ruinfunktion

Wir betrachten das Cramér-Lundberg-Modell und nehmen an, dass die Nettogewinnbedingung $\rho > 0$ erfüllt ist.

Definition 1.4.1. *Wir definieren die Verteilungsfunktion $F_I : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch $F_I(x) := 0$ für $x < 0$ und*

$$F_I(x) := \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 1.4.2. *Nach Lemma 1.2.1 ist F_I tatsächlich eine Verteilungsfunktion, und es gilt $F_I(0) = 0$. Für das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß m_I auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gilt $m_I \ll \lambda$ mit*

$$\frac{dm_I}{d\lambda} = \frac{\bar{F}}{\mu} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}.$$

Lemma 1.4.3. *Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ erfüllt die Integralgleichung*

$$\Phi = \rho\sigma + \sigma\Phi * F_I.$$

Beweis. Nach Satz 1.2.23(b) erfüllt Φ die Integralgleichung

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \Phi(u-x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Nach Satz 1.2.24(a) gilt außerdem

$$\Phi(0) = 1 - \sigma.$$

Nach Definition 1.2.15 gilt

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho},$$

und es folgt

$$1 - \sigma = \frac{\rho}{1+\rho} = \rho\sigma.$$

Weiterhin gilt nach Bemerkung 1.2.16

$$\sigma = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\Phi(u) = \rho\sigma + \sigma \int_{(0,u]} \Phi(u-x)F_I(dx), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

□

Satz 1.4.4.

(a) *Die Integralgleichung aus Lemma 1.4.3 besitzt genau eine lokal beschränkte, messbare Lösung. Diese ist gegeben durch die* Pollczek-Khinchin-Formel

$$\Phi = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n}.$$

(b) *Weiterhin gilt*

$$\Psi = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \overline{F_I^{*n}}.$$

Beweis.

(a) Die Eindeutigkeit erfolgt ähnlich wie im Beweis von Satz 1.1.21. Es sei $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte, messbare Funktion mit

$$A = \rho\sigma + \sigma A * F_I.$$

Induktiv folgt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A &= \rho\sigma + \sigma A * F_I = \rho\sigma + \sigma(\rho\sigma + \sigma A * F_I) * F_I = \rho\sigma + \rho\sigma^2 F_I + \sigma^2 A * F_I^{*2} \\ &= \rho\sigma + \rho\sigma^2 F_I + \sigma^2(\rho\sigma + \sigma A * F_I) * F_I^{*2} = \rho\sigma + \rho\sigma^2 F_I + \rho\sigma^3 F_I^{*2} + \sigma^3 A * F_I^{*3} \\ &= \ldots = \rho\sigma \sum_{n=0}^{m} \sigma^n F_I^{*n} + \sigma^{m+1} A * F_I^{*(m+1)} \to \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n} \quad \text{für } m \to \infty. \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass Φ eine Lösung ist. Einsetzen von

$$\Phi = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n}$$

in den Ausdruck

$$\rho\sigma + \sigma\Phi * F_I$$

liefert

$$\begin{aligned} \rho\sigma + \sigma\Phi * F_I &= \rho\sigma + \rho\sigma^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n} \right) * F_I \\ &= \rho\sigma + \rho\sigma \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1} F_I^{*(n+1)} \right) \\ &= \rho\sigma F_I^{*0} + \rho\sigma \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n} \\ &= \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n} = \Phi. \end{aligned}$$

(b) Wegen

$$1 - \sigma = \frac{\rho}{1+\rho} = \rho\sigma$$

gilt mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n = \frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{\rho\sigma}.$$

Also folgt mit Teil (a)

$$\rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \overline{F_I^{*n}} = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n (1 - F_I^{*n}) = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n - \Phi = 1 - \Phi = \Psi.$$

□

Bemerkung: Die Pollczek-Khinchin-Formel folgt auch mit einer verallgemeinerten Version der Erneuerungsgleichung (Satz 1.1.21) für endliche Maße. Genauer gesagt, sei $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine monotone wachsende càdlàg-Funktion mit $G(0) = 0$. Dann ist, unter Beachtung von Satz 1.1.12(a), die Lösung der Gleichung

$$H = a + H * G$$

gegeben durch

$$H = a * \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}.$$

Dass es sich um eine Lösung handelt, zeigt folgende Rechnung:

$$a + \left(a * \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n} \right) * G = a + a * \sum_{n=0}^{\infty} G^{*(n+1)} = a + a * \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n} = a * \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}.$$

In der aktuell vorliegenden Situation betrachten wir die Gleichung

$$\Phi = \rho\sigma + \Phi * (\sigma F_I).$$

Wir erhalten dann unmittelbar die Pollczek-Khinchin-Formel

$$\Phi = \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n F_I^{*n},$$

wobei wir noch beachten, dass gemäß Definition 1.1.13 gilt

$$(\lambda A) * (\mu B) = (\lambda\mu)(A * B)$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ und alle lokal beschränkten càdlàg-Funktionen A, B mit $A(0) = B(0) = 0$.

Satz 1.4.5. *Falls $F_I \in \mathscr{S}$, dann gilt*

$$\Psi \sim \frac{1}{\rho}\bar{F}_I.$$

Beweis. Wegen $\sigma \in (0,1)$ existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$\sigma(1+\epsilon) \in (0,1).$$

Nach Satz 1.3.33 existiert ein $K \in (0,\infty)$, so dass

$$\frac{\overline{F_I^{*n}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leq K(1+\epsilon)^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+ \text{ und alle } n \geq 2,$$

und daher

$$\sigma^n \frac{\overline{F_I^{*n}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leq K(\sigma(1+\epsilon))^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+ \text{ und alle } n \geq 2,$$

Mit der geometrischen Reihe, dem Konvergenzsatz von Lebesgue und Bemerkung 1.3.20 folgt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j \overline{F_I^{*j}}(x) \right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k k \bar{F}_I(x) \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k k \right)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j \frac{\overline{F_I^{*j}}(x)}{\bar{F}_I(x)}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k k \right)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to\infty} \sigma^j \frac{\overline{F_I^{*j}}(x)}{\bar{F}_I(x)} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k k \right)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sigma^j j \right) = 1,$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \overline{F_I^{*n}} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n n \bar{F}_I.$$

Wegen

$$1 - \sigma = \frac{\rho}{1+\rho} = \rho\sigma$$

gilt mit der geometrischen Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma^{n-1} = \frac{1}{(1-\sigma)^2} = \frac{1}{(\rho\sigma)^2}.$$

Mit Satz 1.4.4(b) folgt nun

$$\begin{aligned}\Psi &= \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n \overline{F_I^{*n}} \\ &\sim \rho\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n n \bar{F}_I = \rho\sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} n\sigma^{n-1} \bar{F}_I = \frac{\rho\sigma^2}{(\rho\sigma)^2} \bar{F}_I = \frac{1}{\rho} \bar{F}_I.\end{aligned}$$

□

Lemma 1.4.6. *Es sei $X \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit Parametern $\kappa, \alpha > 0$.*

(a) Für $\alpha > 1$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$

(b) Für $\alpha \in (0, 1]$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\bar{F}(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,\kappa)}(x) + \left(\frac{\kappa}{x}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Mit Lemma 1.2.1 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} \bar{F}(x)dx = \kappa + \int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{x}\right)^{\alpha} dx = \kappa + \kappa^{\alpha} \int_{\kappa}^{\infty} x^{-\alpha} dx \\ &= \kappa + \kappa^{\alpha} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_{x=\kappa}^{x=\infty} = \kappa + \kappa^{\alpha} \frac{\kappa^{1-\alpha}}{\alpha - 1} = \frac{\kappa(\alpha-1)}{\alpha-1} + \frac{\kappa}{\alpha-1} = \frac{\alpha\kappa}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

(b) Mit Lemma 1.2.1 gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \bar{F}(x)dx = \kappa + \int_{\kappa}^{\infty} \left(\frac{\kappa}{x}\right)^{\alpha} dx = \infty.$$

□

Lemma 1.4.7. *Es sei F die Verteilungsfunktion von $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ mit Parametern $\kappa > 0$ und $\alpha > 1$.*

(a) Es gilt

$$F_I(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{\alpha-1}{\alpha\kappa}x, & \text{falls } x \in [0, \kappa], \\ 1 - \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha}x^{1-\alpha}, & \text{falls } x \in [\kappa, \infty). \end{cases}$$

(b) Es gilt

$$\bar{F}_I(x) = \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha}x^{1-\alpha} \quad \text{für alle } x \in [\kappa, \infty).$$

(c) Es gilt $F_I \in \mathscr{R}$.

Beweis.

(a) Es sei $\mu = \mathbb{E}[X]$ mit $X \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$. Nach Lemma 1.4.6 gilt

$$\mu = \frac{\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$

Außerdem gilt

$$\bar{F}(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,\kappa)}(x) + \left(\frac{\kappa}{x}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Also gilt für alle $x \in [0, \kappa]$

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy = \frac{x}{\mu} = \frac{\alpha - 1}{\alpha\kappa}x,$$

und für alle $x \in [\kappa, \infty)$

$$\begin{aligned} F_I(x) &= \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)dy = \frac{1}{\mu}\left(\kappa + \int_\kappa^x \left(\frac{\kappa}{y}\right)^{\alpha} dy\right) \\ &= \frac{1}{\mu}\left(\kappa + \kappa^{\alpha}\int_\kappa^x y^{-\alpha}dy\right) = \frac{1}{\mu}\left(\kappa + \kappa^{\alpha}\frac{x^{1-\alpha} - \kappa^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha\kappa}\left(\kappa + \frac{\kappa}{\alpha - 1} + \kappa^{\alpha}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{\alpha - 1}{\alpha\kappa}\left(\frac{\alpha\kappa}{\alpha - 1} - \frac{\kappa^{\alpha}}{\alpha - 1}x^{1-\alpha}\right) = 1 - \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha}x^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

(b) Folgt aus Teil (a).

(c) Für die Funktion $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$L(x) = x^{\alpha-1}\bar{F}_I(x), \quad x \in \mathbb{R}_+$$

gilt nach Teil (b)

$$L(x) = \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha} \quad \text{für alle } x \geq \kappa.$$

Also gilt $L \in \mathscr{R}_0$, und es folgt $F_I \in \mathscr{R}$.

□

Nun kommen wir zurück zum Cramér-Lundberg-Modell.

Lemma 1.4.8. *Es gelte $X_1 \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ mit Parametern $\kappa > 0$ und $\alpha > 1$. Dann gilt die Nettogewinnbedingung $\rho > 0$ genau dann, wenn*

$$c > \frac{\lambda\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$

Beweis. Nach Lemma 1.4.6 gilt

$$\mu = \frac{\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$

Also gilt

$$\rho > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{c}{\lambda\mu} > 1 \;\Leftrightarrow\; c > \lambda\mu \;\Leftrightarrow\; c > \frac{\lambda\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$

□

Beispiel 1.4.9. *Falls $X_1 \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ mit Parametern $\kappa > 0$ und $\alpha > 1$, so dass*

$$c > \frac{\lambda\alpha\kappa}{\alpha - 1},$$

dann gilt

$$\Psi(u) \sim \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\rho\alpha} u^{1-\alpha} \quad \textit{für } u \to \infty.$$

Beweis. Nach Lemma 1.4.7 gilt

$$\bar{F}_I(x) = \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha} x^{1-\alpha} \quad \text{für alle } x \in [\kappa, \infty).$$

Also folgt mit Satz 1.4.5

$$\Psi(u) \sim \frac{1}{\rho}\bar{F}_I(u) = \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\rho\alpha} u^{1-\alpha} \quad \text{für } u \to \infty.$$

□

Kapitel 2

Rückversicherung

2.1 Individuelles und kollektives Modell

Definition 2.1.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Familie*

$$\{Z_i\}_{i=1,\dots,n}$$

von unanhäbgigen, nichtnegativen Zufallsvariablen heißt ein individuelles Modell. Der Gesamtschaden ist gegeben durch

$$S := \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

Bemerkung 2.1.2. *Sind $h_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ für $i = 1, \dots, n$ messbare Abbildungen, so ist die Familie*

$$\{h_i(Z_i)\}_{i=1,\dots,n}$$

ebenfalls ein individuelles Modell.

Definition 2.1.3. *Es seien N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable, und $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, positiver Zufallsvariablen, die unabhängig von N ist. Dann heißt ein Paar*

$$\langle N, \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

ein kollektives Modell. Der Gesamtschaden ist gegeben durch

$$S := \sum_{j=1}^{N} X_j.$$

Bemerkung 2.1.4. *Ist* $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *eine messbare Abbildung, so ist das Paar*

$$\langle N, \{h(X_j)\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$$

ebenfalls ein kollektives Modell.

Nun sei $S \geq 0$ der Gesamtschaden eines Bestandes.

Definition 2.1.5. *Es seien* $S', S'' \geq 0$ *Zufallsvariablen mit*

$$S = S' + S''.$$

Dann bezeichnen wir mit S' *den* *Gesamtschaden des Erstversicherers, und mit* S'' *den* *Gesamtschaden des Rückversicherers.*

2.2 Proportionale Rückversicherung

2.2.1 Quoten-Rückversicherung

Es sei $q \in (0, 1)$ eine allgemeine Quote.

Definition 2.2.1. *Bei der* *Quoten-Rückversicherung* *setzen wir*

$$S' := (1 - q)S \quad und \quad S'' := qS.$$

Bemerkung 2.2.2. *Offensichtlich gilt* $S = S' + S''$.

Satz 2.2.3. *Es sei* $\{Z_i\}_{i=1,\dots,n}$ *ein individuelles Modell für den Gesamtschaden.*

(a) Für den Erstversicherer liegt das individuelle Modell

$$\{(1 - q)Z_i\}_{i=1,\dots,n}$$

vor.

(b) Für den Rückversicherer liegt das individuelle Modell

$$\{qZ_i\}_{i=1,\dots,n}$$

vor.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.2. □

Satz 2.2.4. *Es sei* $\langle N, \{X_j\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$ *ein kollektives Modell für den Gesamtschaden.*

(a) *Für den Erstversicherer liegt das kollektive Modell*

$$\langle N, \{(1-q)X_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

vor.

(b) *Für den Rückversicherer liegt das kollektive Modell*

$$\langle N, \{qX_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

vor.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.4. □

2.2.2 Summenexzedenten-Rückversicherung

Es sei $M \in (0,\infty)$ ein maximaler Selbstbehalt. Wir definieren $q : (0,\infty) \to [0,1)$ als

$$q(V) := \frac{(V-M)^+}{V} = \begin{cases} 0, & \text{falls } V \le M, \\ 1 - \frac{M}{V}, & \text{falls } M < V. \end{cases}$$

Bemerkung 2.2.5. *Die Funktion $V \mapsto q(V)$ ist monoton wachsend.*

Definition 2.2.6.

(a) *Wir nennen q die individuelle Quote zum Maximum M.*

(b) *Wir bezeichnen $q(V)$ als individuelle Quote für ein Risiko mit Versicherungssumme V.*

Es sei $\{Z_i\}_{i=1,\dots,n}$ ein individuelles Modell. Für jedes $i = 1,\dots,n$ sei $V_i \in (0,\infty)$ die Versicherungssumme des i-ten Risikos.

Definition 2.2.7. *Bei der Summenexzedenten-Rückversicherung setzen wir*

$$S' := \sum_{i=1}^{n} \big(1-q(V_i)\big) Z_i \quad \textit{und} \quad S'' := \sum_{i=1}^{n} q(V_i) Z_i.$$

Bemerkung 2.2.8. *Offensichtlich gilt $S = S' + S''$.*

Satz 2.2.9.

(a) *Für den Erstversicherer liegt das individuelle Modell*

$$\{(1-q(V_i))Z_i\}_{i=1,\dots,n}$$

vor.

(b) *Für den Rückversicherer liegt das individuelle Modell*

$$\{q(V_i)Z_i\}_{i=1,\dots,n}$$

vor.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.2. □

Nun sei zusätzlich ein $k \in (0,\infty)$ gegeben. Wir definieren die individuelle Quote $q : (0,\infty) \to [0,1)$ als

$$q(V) := \min\left\{\frac{(V-M)^+}{V}, \frac{kM}{V}\right\} = \begin{cases} 0, & \text{falls } V \leq M, \\ 1 - \frac{M}{V}, & \text{falls } M < V \leq (k+1)M, \\ k\frac{M}{V}, & \text{falls } (k+1)M < V. \end{cases}$$

Hier liegt eine begrenzte Haftung des Rückversicherers auf k Maxima vor.

Bemerkung 2.2.10. *Die Funktion $V \mapsto q(V)$ ist auf $(0,(k+1)M]$ monoton wachsend, auf $((k+1)M,\infty)$ monoton fallend, und nimmt ihren maximalen Wer $\frac{k}{k+1}$ für die Versicherungssumme $V = (k+1)M$ an.*

Auch mit dieser Quote gelten die Aussagen von Satz 2.2.9.

2.3 Nichtproportionale Rückversicherung

2.3.1 Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung

Es wird eine Priorität $d \in (0,\infty)$ vereinbart. Wir betrachten ein kollektives Modell $\langle N, \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$.

Definition 2.3.1. *Bei der Einzelschadenexzedenten-Rückversicherung oder (oder excess-loss Versicherung) setzen wir*

$$S' := \sum_{j=1}^{N} \min\{X_j, d\} \quad \textit{und} \quad S'' := \sum_{j=1}^{N} (X_j - d)^+.$$

Bemerkung 2.3.2. *Es gilt $S = S' + S''$.*

Satz 2.3.3.

(a) *Für den Erstversicherer liegt das kollektive Modell*

$$\langle N, \{\min\{X_j, d\}\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

vor.

(b) Für den Rückversicherer liegt das kollektive Modell

$$\langle N, \{(X_j - d)^+\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$$

vor.

Beweis. Folgt aus Bemerkung 2.1.4. □

Es sei $X := X_1$ und $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ dessen Verteilungsfunktion. Wir setzen

$$\eta := \mathbb{P}(X > d) = \bar{F}(d).$$

Wir nehmen an, dass $X, N \in \mathscr{L}^2$ und $\eta \in (0,1)$ sowie $\mathbb{E}[N] > 0$.

Satz 2.3.4. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[S] &= \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[X]^2,\\
\operatorname{Var}[S'] &= \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[\min\{X,d\}] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[\min\{X,d\}]^2,\\
\operatorname{Var}[S''] &= \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[(X-d)^+] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[(X-d)^+]^2.
\end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus der Variante der zweiten Waldschen Gleichung; siehe [Tap19, Satz 3.2.23]. □

Lemma 2.3.5. *Es gilt*

$$\mathbb{E}[\min\{X,d\}(X-d)^+] = d\,\mathbb{E}[(X-d)^+].$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\min\{X,d\}(X-d)^+] &= \mathbb{E}[\min\{X,d\}(X-d)^+\mathbb{1}_{\{X\geq d\}}]\\
&\quad + \mathbb{E}[\min\{X,d\}(X-d)^+\mathbb{1}_{\{X<d\}}]\\
&= d\,\mathbb{E}[(X-d)^+].
\end{aligned}$$

□

Satz 2.3.6.

(a) Es gilt $\mathbb{E}[S'] + \mathbb{E}[S''] = \mathbb{E}[S]$.

(b) Es gilt $\operatorname{Var}[S'] + \operatorname{Var}[S''] \leq \operatorname{Var}[S]$.

Beweis.

(a) Folgt, da $S' + S'' = S$.

(b) Mit Lemma 2.3.5 folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\min\{X,d\}(X-d)^+] &= d\,\mathbb{E}[(X-d)^+]\\ &\geq \mathbb{E}[\min\{X,d\}]\,\mathbb{E}[(X-d)^+],\end{aligned}$$

und damit

$$\operatorname{Cov}(\min\{X,d\},(X-d)^+) \geq 0.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[X] &= \operatorname{Var}[\min\{X,d\} + (X-d)^+]\\ &= \operatorname{Var}[\min\{X,d\}] + 2\operatorname{Cov}(\min\{X,d\},(X-d)^+) + \operatorname{Var}[(X-d)^+]\\ &\geq \operatorname{Var}[\min\{X,d\}] + \operatorname{Var}[(X-d)^+].\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]^2 &= \big(\mathbb{E}[\min\{X,d\}] + \mathbb{E}[(X-d)^+]\big)^2\\ &= \mathbb{E}[\min\{X,d\}]^2 + 2\,\mathbb{E}[\min\{X,d\}]\,\mathbb{E}[(X-d)^+] + \mathbb{E}[(X-d)^+]^2\\ &\geq \mathbb{E}[\min\{X,d\}]^2 + \mathbb{E}[(X-d)^+]^2.\end{aligned}$$

Mit Satz 2.3.4 erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}[S] &= \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[X]^2\\ &\geq \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[\min\{X,d\}] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[\min\{X,d\}]^2\\ &\quad + \mathbb{E}[N]\operatorname{Var}[(X-d)^+] + \operatorname{Var}[N]\,\mathbb{E}[(X-d)^+]^2\\ &= \operatorname{Var}[S'] + \operatorname{Var}[S''].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.7. *Dass kollektive Modell $\langle N, \{(X_j-d)^+\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ für den Rückversicherer hat folgende Nachteile:*

- *Der Rückversicherer kann aus den verfügbaren Daten nicht die Verteilung von N schätzen.*
- *Der Rückversicherer kann aus den verfügbaren Daten nicht die Verteilung von $(X-d)^+$ schätzen. Genauer gesagt, der Rückversicherer kann nicht die Wahrscheinlichkeit*

$$\mathbb{P}((X-d)^+ = 0) = \mathbb{P}(X \leq d) = 1-\eta$$

schätzen.

Wir konstruieren ein neues kollektives Modell für den Rückversicherer wie folgt:

(1) Wir setzen

$$N'' := \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\{X_i > d\}}.$$

(2) Wir definieren die streng monoton wachsende Folge $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\overline{\mathbb{N}}_0$-wertigen Zufallsvariablen rekursiv durch $\nu_0 := 0$ und

$$\nu_j := \inf\{i \in \mathbb{N} : \nu_{j-1} < i \text{ und } X_i > d\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

(3) Nun definieren wir die Folge $(X''_j)_{j\in\mathbb{N}}$ durch

$$X''_j := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\nu_j = i\}}(X_i - d), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Satz 2.3.8. *Das Paar $\langle N'', \{X''_j\}_{j\in\mathbb{N}}\rangle$ ist ebenfalls ein kollektives Modell für den Rückversicherer mit Gesamtschaden S''.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 8.2.7]. □

2.3.2 Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung

Es wird eine Priorität $d \in (0, \infty)$ vereinbart. Wir betrachten den Gesamtschaden $S \geq 0$ eines Bestandes.

Definition 2.3.9. *Bei der Kumulschadenexzedenten-Rückversicherung (oder stop-loss Versicherung) setzen wir*

$$S' := \min\{S, d\} \quad \textit{und} \quad S'' := (S - d)^+.$$

Bemerkung 2.3.10. *Es gilt $S = S' + S''$.*

Kapitel 3

Vergleich von Risiken

3.1 Die stochastische Ordnung

Definition 3.1.1. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ schreiben wir*

$$\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y,$$

falls für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\bar{F}_X(z) \leq \bar{F}_Y(z).$$

Lemma 3.1.2. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$.

(ii) Es gilt $\mathbb{P}(X > n) \leq \mathbb{P}(Y > n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis. Folgt aus [Sch06, Lemma 9.1.1]. □

Wir bezeichnen mit $\Pi^0(\mathbb{N}_0)$ die Menge aller stochastischen Vektoren $\pi : \mathbb{N}_0 \to [0, 1]$.

Satz 3.1.3. *Die Relation $\leq^0$ induziert eine Ordnungsrelation auf $\Pi^0(\mathbb{N}_0)$. Es gilt also:*

(a) Reflexivität: Für alle $\pi \in \Pi^0(\mathbb{N}_0)$ gilt $\pi \leq \pi$.

(b) Antisymmetrie: Für alle $\pi_1, \pi_2 \in \Pi^0(\mathbb{N}_0)$ folgt aus $\pi_1 \leq \pi_2$ und $\pi_2 \leq \pi_1$, dass $\pi_1 = \pi_2$.

(c) Transitivität: Für alle $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \Pi^0(\mathbb{N}_0)$ folgt aus $\pi_1 \leq \pi_2$ und $\pi_2 \leq \pi_3$, dass $\pi_1 \leq \pi_3$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.1.2]. □

Definition 3.1.4. *Wir bezeichnen $\leq^0$ als stochastische Ordnung.*

Für eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ definieren wir $\Delta f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$(\Delta f)(k) := f(k+1) - f(k), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_+$, so dass $\Delta f \geq 0$.

Lemma 3.1.5. *Es sei $X \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$. Dann gilt für alle $f \in \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$*

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta f)(k) \bar{F}_X(k).$$

Beweis. Siehe [Sch06, Lemma 9.1.8]. □

Beispiel 3.1.6. *Insbesondere gilt*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{F}_X(k).$$

Vergleiche [Tap19, Lemma 3.2.19].

Satz 3.1.7. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$.

(ii) Es gilt $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ für alle $f \in \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Lemma 3.1.5 gilt für alle $f \in \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta f)(k) \bar{F}_X(k) \\ &\leq f(0) + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta f)(k) \bar{F}_Y(k) = \mathbb{E}[f(Y)].\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Für jedes $z \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{1}_{(z,\infty)} \in \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$. □

Korollar 3.1.8. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ mit $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$ gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.*

Beweis. Folgt aus Satz 3.1.7. □

Korollar 3.1.9. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ mit $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$ und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ gilt $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$.*

Beweis. Nach Beispiel 3.1.6 gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y > k) = \mathbb{E}[Y].$$

Wegen $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ gilt daher

$$\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(Y > k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Also gilt $\mathbb{P} \circ Y \leq^0 \mathbb{P} \circ X$, und folglich $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$. □

Bemerkung 3.1.10. *Zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ mit $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{P} \circ X \neq \mathbb{P} \circ Y$ sind in der stochastischen Ordnung also nicht miteinander vergleichbar.*

Satz 3.1.11. *Es seien*

$$\{X_i\}_{i=1,\ldots,m} \quad \textit{und} \quad \{Y_i\}_{i=1,\ldots,n}$$

unbahängige individuelle Modelle, so dass $\mathbb{P} \circ X_i = \mathbb{P} \circ X$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\mathbb{P} \circ Y_i = \mathbb{P} \circ Y$ für alle $i = 1, \ldots, n$ mit Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$, so dass $m \leq n$ und $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$. Es seien

$$S := \sum_{i=1}^{m} X_i \quad \textit{und} \quad T := \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

die Gesamtschäden. Dann gilt $\mathbb{P} \circ S \leq^0 \mathbb{P} \circ T$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.1.15]. □

Satz 3.1.12. *Es seien*

$$\langle M, \{X_j\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle \quad \textit{und} \quad \langle N, \{Y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \rangle$$

unbahängige kollektive Modelle, so dass $\mathbb{P} \circ X_j = \mathbb{P} \circ X$ und $\mathbb{P} \circ Y_j = \mathbb{P} \circ Y$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$, so dass $\mathbb{P} \circ M \leq^0 \mathbb{P} \circ N$ und $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$. Es seien

$$S := \sum_{j=1}^{M} X_j \quad \textit{und} \quad T := \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

die Gesamtschäden. Dann gilt $\mathbb{P} \circ S \leq^0 \mathbb{P} \circ T$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.1.16]. □

3.2 Die stop-loss Ordnung

Lemma 3.2.1. *Es sei $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$.*

(a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[(X-a)^+] = \int_a^\infty \bar{F}_X(x)dx.$$

(b) Ist $Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ eine weitere Zufallsvariable mit

$$\mathbb{E}[(X-a)^+] = \mathbb{E}[(Y-a)^+] \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

dann gilt $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$.

Beweis.

(a) Wir betrachten den Fall $a \in \mathbb{R}_+$ und definieren die Funktion $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\varphi(x) = (x-a)^+, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt $\varphi(0) = 0$, die Funktion φ ist absolutstetig, und es gilt fast überall

$$\varphi'(x) = \mathbb{1}_{\{x>a\}}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Insbesondere gilt $\varphi' \geq 0$ fast überall. Also folgt mit Lemma 1.3.6

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-a)^+] = \mathbb{E}[\varphi(X)] &= \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx \\ &= \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x>a\}}\bar{F}(x)dx = \int_a^\infty \bar{F}_X(x)dx.\end{aligned}$$

Für die Situation $a < 0$ verweisen wir auf [Sch06, Satz 9.2.1].

(b) Siehe [Sch06, Satz 9.2.1].

□

Bemerkung 3.2.2. *Die Funktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad a \mapsto \mathbb{E}[(X-a)^+]$$

wird auch integrierte Überlebensfunktion genannt.

Bemerkung 3.2.3. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ mit*

$$\bar{F}_X(a) = \bar{F}_Y(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

gilt bekanntlich $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$.

Definition 3.2.4. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ schreiben wir*

$$\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y,$$

falls für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[(X - a)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - a)^+].$$

Lemma 3.2.5. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\mathbb{E}[(X - n)^+] \leq \mathbb{E}[(Y - n)^+].$$

Wir bezeichnen mit $\Pi^1(\mathbb{N}_0)$ die Menge aller stochastischen Vektoren $\pi : \mathbb{N}_0 \to [0, 1]$, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \pi(k) < \infty.$$

Satz 3.2.6. *Die Relation $\leq^1$ induziert eine Ordnungsrelation auf $\Pi^1(\mathbb{N}_0)$.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.2.2]. □

Definition 3.2.7. *Wir bezeichnen $\leq^1$ als stop-loss Ordnung.*

Lemma 3.2.8. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ mit $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$ gilt $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.1(a). □

Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0)$ die Menge aller Funktionen $f \in \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$, so dass $\Delta^2 f := \Delta(\Delta f) \geq 0$. Es gilt also $\mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0) \subset \mathscr{M}^0(\mathbb{N}_0)$.

Lemma 3.2.9. *Es sei $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$. Dann gilt für alle $f \in \mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0)$*

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0) + (\Delta f)(0)\,\mathbb{E}[X] + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^2 f)(k)\,\mathbb{E}[(X - (k+1))^+].$$

Beweis. Siehe [Sch06, Lemma 9.2.8]. □

Beispiel 3.2.10. *Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit $f(k) = k^2$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ sind Δf und $\Delta^2 f$ gegeben durch*

$$\begin{aligned}(\Delta f)(k) &= f(k+1) - f(k) = (k+1)^2 - k^2 = (k^2 + 2k + 1) - k^2 = 2k + 1,\\ (\Delta^2 f)(k) &= (\Delta f)(k+1) - (\Delta f)(k) = (2(k+1)+1) - (2k+1) = 2\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X] + 2\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X-k)^+].$$

Beispiel 3.2.11. *Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ mit*

$$f(k) = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

gilt

$$\begin{aligned}(\Delta f)(k) &= f(k+1) - f(k) = \frac{(k+1)k}{2} - \frac{k(k-1)}{2} = k,\\ (\Delta^2 f)(k) &= (\Delta f)(k+1) - (\Delta f)(k) = 1\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also gilt

$$\mathbb{E}\left[\binom{X}{2}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X-k)^+].$$

Satz 3.2.12. *Für zwei Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$.

(ii) Es gilt $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ für alle $f \in \mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0)$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Nach Lemma 3.2.9 gilt für alle $f \in \mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= f(0) + (\Delta f)(0)\,\mathbb{E}[X] + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^2 f)(k)\,\mathbb{E}[(X-(k+1))^+]\\ &\leq f(0) + (\Delta f)(0)\,\mathbb{E}[Y] + \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta^2 f)(k)\,\mathbb{E}[(Y-(k+1))^+] = \mathbb{E}[f(Y)].\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (i): Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt $x \mapsto (x-a)^+ \in \mathscr{M}^1(\mathbb{N}_0)$. □

Korollar 3.2.13. *Für zwei Zufallsvariablen* $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ *mit* $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$ *gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &\leq \mathbb{E}[Y], \\ \mathbb{E}[X^2] &\leq \mathbb{E}[Y^2], \\ \mathbb{E}\left[\binom{X}{2}\right] &\leq \mathbb{E}\left[\binom{Y}{2}\right]. \end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus Korollar 3.1.8 und Satz 3.2.12. □

Korollar 3.2.14. *Für zwei Zufallsvariablen* $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ *mit* $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$ *und* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ *gilt*

$$\mathrm{Var}[X] \leq \mathrm{Var}[Y].$$

Beweis. Nach Korollar 3.2.13 gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathrm{Var}[Y].$$

□

Korollar 3.2.15. *Für zwei Zufallsvariablen* $X, Y \in \mathscr{L}^2(\mathbb{N}_0)$ *mit* $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$ *und* $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ *gilt*

$$\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y.$$

Beweis. Nach Beispiel 3.2.10 gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X-k)^2] \\ &\leq \mathbb{E}[Y] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(Y-k)^2] = \mathbb{E}[Y^2]. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ gilt daher

$$\mathbb{E}[(X-k)^+] = \mathbb{E}[(Y-k)^+] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Also gilt $\mathbb{P} \circ Y \leq^1 \mathbb{P} \circ X$, und folglich $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$. □

Bemerkung 3.2.16. *Zwei Zufallsvariablen* $X, Y \in \mathscr{L}^2(\mathbb{N}_0)$ *mit* $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$ *und* $\mathbb{P} \circ X \neq \mathbb{P} \circ Y$ *sind in der stop-loss Ordnung also nicht miteinander vergleichbar.*

Korollar 3.2.17. *Für zwei Zufallsvariablen* $X, Y \in \mathscr{L}^2(\mathbb{N}_0)$ *mit* $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$ *und* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ *sowie* $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ *gilt*

$$\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y.$$

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{Var}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[Y^2] = \mathrm{Var}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2.$$

Also folgt mit Korollar 3.2.15, dass $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$. □

Satz 3.2.18. *Es seien*

$$\{X_i\}_{i=1,\ldots,m} \quad \textit{und} \quad \{Y_i\}_{i=1,\ldots,n}$$

unbahängige individuelle Modelle, so dass $\mathbb{P} \circ X_i = \mathbb{P} \circ X$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\mathbb{P} \circ Y_i = \mathbb{P} \circ Y$ für alle $i = 1, \ldots, n$ mit Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$, so dass $m \leq n$ und $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$. Es seien

$$S := \sum_{i=1}^{m} X_i \quad \textit{und} \quad T := \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

die Gesamtschäden. Dann gilt $\mathbb{P} \circ S \leq^1 \mathbb{P} \circ T$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.2.15]. □

Satz 3.2.19. *Es seien*

$$\langle M, \{X_j\}_{j\in\mathbb{N}} \rangle \quad \textit{und} \quad \langle N, \{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \rangle$$

unabhängige kollektive Modelle, so dass $\mathbb{P}\circ X_j = \mathbb{P}\circ X$ und $\mathbb{P}\circ Y_j = \mathbb{P}\circ Y$ für alle $j \in \mathbb{N}$ mit Zufallsvariablen X und Y, so dass $M, N, X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ und $\mathbb{P} \circ M \leq^1 \mathbb{P} \circ N$ sowie $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$. Es seien

$$S := \sum_{j=1}^{M} X_j \quad \textit{und} \quad T := \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

die Gesamtschäden. Dann gilt $\mathbb{P} \circ S \leq^1 \mathbb{P} \circ T$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 9.2.16]. □

Kapitel 4

Kalkulation von Prämien

4.1 Prämienprinzipien

Definition 4.1.1. *Eine Abbildung* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *mit* $\mathscr{L}^{\mathbb{H}} \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$ *heißt ein* *Prämienprinzip, falls gilt:*

(a) *Für alle* $X, Y \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *mit* $\mathbb{P} \circ X = \mathbb{P} \circ Y$ *gilt* $\mathbb{H}[X] = \mathbb{H}[Y]$.

(b) *Für alle* $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *gilt* $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{H}[X]$. *Hierbei nennen wir* $\mathbb{E}[X]$ *die Nettoprämie und* $\mathbb{H}[X] - \mathbb{E}[X]$ *den Sicherheitszuschlag.*

(c) *Für alle* $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *gilt* $\mathbb{P}(X > \mathbb{H}[X]) > 0$. *Diese Bedingung wird auch als no-arbitrage Bedingung bezeichnet.*

Wir bezeichnen mit $\mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *die Klasse der unter dem Prämienprinzip* $\mathbb{H}$ *versicherbaren Risiken.*

Satz 4.1.2. *Es sei* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *ein Prämienprinzip. Für jede Zufallsvariable* X *mit* $\mathbb{P}(X = c) = 1$ *für ein* $c \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $X \notin \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$.

Beweis. Es gilt $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$ und $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$. Also gilt

$$\mathbb{P}(X > \mathbb{H}[X]) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] > \mathbb{H}[X]).$$

Demnach kann nicht gleichzeitig $\mathbb{P}(X > \mathbb{H}[X]) > 0$ und $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{H}[X]$ gelten, und es folgt $X \notin \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$. □

Korollar 4.1.3. *Es sei* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *ein Prämienprinzip. Für jedes* $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *gilt* $\mathbb{E}[X] > 0$ *und* $\mathrm{Var}[X] > 0$.

Beweis. Es sei $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ beliebig. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \geq 0$, da $X \geq 0$. Falls $\mathbb{E}[X] = 0$, dann folgt wegen $X \geq 0$, dass $\mathbb{P}(X = 0) = 1$, was Satz 4.1.2 widerspricht. Also gilt $\mathbb{E}[X] > 0$. Nach Satz 4.1.2 gilt außerdem $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) < 1$, und daher $\mathrm{Var}[X] > 0$. □

Definition 4.1.4. *Es sei $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ ein Prämienprinzip.*

(a) $\mathbb{H}$ heißt positiv homogen, falls für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ und alle $c \in (0, \infty)$ mit $cX \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[cX] = c\,\mathbb{H}[X].$$

(b) $\mathbb{H}$ heißt proportional, falls für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ und alle $c \in (0, 1)$ mit $cX \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[cX] = c\,\mathbb{H}[X].$$

(c) $\mathbb{H}$ heißt isoton bezüglich der stochastischen Ordnung, falls für alle $X, Y \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $X, Y \in \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0)$ und $\mathbb{P} \circ X \leq^0 \mathbb{P} \circ Y$ gilt

$$\mathbb{H}[X] \leq \mathbb{H}[Y].$$

(d) $\mathbb{H}$ heißt isoton bezüglich der stop-loss Ordnung, falls für alle $X, Y \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $X, Y \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$ und $\mathbb{P} \circ X \leq^1 \mathbb{P} \circ Y$ gilt

$$\mathbb{H}[X] \leq \mathbb{H}[Y].$$

Bemerkung 4.1.5. *Jedes positiv homogene Prämienprinzip ist proportional.*

Bemerkung 4.1.6. *Jedes Prämienprinzip, das isoton bezüglich der stop-loss Ordnung ist, ist auch isoton bezüglich der stochastischen Ordnung. Dies folgt aus Lemma 3.2.8, da $\mathscr{L}^{\mathbb{H}} \cap \mathscr{L}^0(\mathbb{N}_0) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{N}_0)$.*

Definition 4.1.7. *Wir nennen die Abbildung $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \{X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) : \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) > 0\}$$

und

$$\mathbb{H}[X] := \mathbb{E}[X]$$

das Nettoprämien-Prinzip.

Satz 4.1.8. *Das Nettoprämien-Prinzip ist ein Prämienprinzip, das positiv homogen und isoton bezüglich der stop-loss Ordnung ist.*

Beweis.

- Prämienprinzip: ✓

- Positive Homogenität: Für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ und alle $c \in (0,\infty)$ mit $cX \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt
$$\mathbb{E}[cX] = c\,\mathbb{E}[X].$$
- Isotonie bezüglich der stop-loss Ordnung: Korollar 3.2.13.

□

Definition 4.1.9. *Es sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wir nennen die Abbildung $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \{X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) : \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) > \epsilon \text{ und } 0 < \mathbb{P}(X > a) \leq \epsilon \text{ für ein } a \in \mathbb{R}_+\}$$

und

$$\mathbb{H}[X] := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(X > a) \leq \epsilon\}$$

das Perzentil-Prinzip zum Parameter ϵ.

Satz 4.1.10. *Das Perzentil-Prinzip ist ein Prämienprinzip, das positiv homogen und isoton bezüglich der stochastischen Ordnung ist.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.1.5]. □

4.2 Explizite Prämienprinzipien

Satz 4.2.1. *Es sei $h : \mathscr{L} \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung mit $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$, so dass für alle $X, Y \in \mathscr{L}$ mit $\mathbb{P}\circ X = \mathbb{P}\circ Y$ gilt $h(X) = h(Y)$. Dann ist die Abbildung $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \{X \in \mathscr{L} : \mathbb{E}[X] \leq h(X) \text{ und } \mathbb{P}(X > h(X)) > 0\}$$

und

$$\mathbb{H}[X] := h(X)$$

ein Prämienprinzip.

Beweis. Folgt durch Verifikation der Eigenschaften (a)–(c) aus Definition 4.1.1. □

Definition 4.2.2. *Wir sprechen in diesem Fall von einem expliziten Prämienprinzip.*

Definition 4.2.3. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Das explizite Prämienprinzip mit*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{und} \quad h(X) = \mathbb{E}[X] + \gamma\,\mathbb{E}[X] = (1+\gamma)\mathbb{E}[X]$$

nennen wir das Erwartungswert-Prinzip zum Parameter γ.

Satz 4.2.4. *Das Erwartungswert-Prinzip ist positiv homogen und isoton bezüglich der stop-loss Ordnung.*

Beweis.

- Positive Homogenität: Für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ und alle $c \in (0, \infty)$ mit $cX \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[cX] = (1+\gamma)\mathbb{E}[cX] = c(1+\gamma)\mathbb{E}[X] = c\,\mathbb{H}[X].$$

- Isotonie bezüglich der stop-loss Ordnung: Korollar 3.2.13.

□

Definition 4.2.5. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Das explizite Prämienprinzip mit*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad \text{und} \quad h(X) = \mathbb{E}[X] + \gamma\,\mathrm{Var}[X]$$

nennen wir das <u>Varianz-Prinzip</u> zum Parameter γ.

Definition 4.2.6. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Das explizite Prämienprinzip mit*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad \text{und} \quad h(X) = \mathbb{E}[X] + \gamma\,\mathbb{E}\big[\big((X-\mathbb{E}[X])^+\big)^2\big]$$

nennen wir das <u>Semivarianz-Prinzip</u> zum Parameter γ.

Bemerkung 4.2.7. *Es gilt die Zerlegung*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\big((X-\mathbb{E}[X])^+\big)^2 \mathbb{1}_{\{X>\mathbb{E}[X]\}}\big] + \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2 \mathbb{1}_{\{X\le\mathbb{E}[X]\}}\big].\end{aligned}$$

Definition 4.2.8. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Das explizite Prämienprinzip mit*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad \text{und} \quad h(X) = \mathbb{E}[X] + \gamma\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

nennen wir das <u>Standardabweichungs-Prinzip</u> zum Parameter γ.

Satz 4.2.9. *Das Standardabweichungs-Prinzip ist positiv homogen.*

Beweis. Für alle $c \in (0, \infty)$ und $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[cX] = \mathbb{E}[cX] + \gamma\sqrt{\mathrm{Var}[cX]} = c\,\mathbb{E}[X] + \gamma c\sqrt{\mathrm{Var}[X]} = c\,\mathbb{H}[X].$$

□

Bemerkung 4.2.10. *Nach der Ungleichung von Cantelli (siehe [Tap19, Satz 3.2.29]) gilt für jedes* $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$

$$\mathbb{P}(X > \mathbb{H}[X]) = \mathbb{P}\big(X > \mathbb{E}[X] + \gamma \sqrt{\mathrm{Var}[X]}\big) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{\gamma^2 \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[X]} = \frac{1}{1+\gamma^2}.$$

Definition 4.2.11. *Es sei* $\gamma \in \mathbb{R}_+$ *beliebig. Das explizite Prämienprinzip mit*

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+) \quad \textit{und} \quad h(X) = \mathbb{E}[X] + \gamma \sqrt{\mathbb{E}\big[\big((X - \mathbb{E}[X])^+\big)^2\big]}$$

nennen wir das <u>*Semistandardabweichungs-Prinzip*</u> *zum Parameter* γ.

Satz 4.2.12. *Das Semistandardabweichungs-Prinzip ist positiv homogen.*

Beweis. Für alle $c \in (0,\infty)$ und $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}[cX] &= \mathbb{E}[cX] + \gamma \sqrt{\mathbb{E}\big[\big((cX - \mathbb{E}[cX])^+\big)^2\big]} \\ &= c\,\mathbb{E}[X] + \gamma c \sqrt{\mathbb{E}\big[\big((X - \mathbb{E}[X])^+\big)^2\big]} = c\,\mathbb{H}[X].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.2.13. *Alle bisher betrachteten Prämienprinzipien stimmen für* $\gamma = 0$ *mit dem Nettoprämienprinzip überein.*

Satz 4.2.14. *Es sei* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *eine streng monoton wachsende, konvexe Funktion. Dann ist die Abbildung* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *gegeben durch*

$$\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \{X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) : g(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) \ \textit{und} \ \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) > 0\}$$

und

$$\mathbb{H}[X] := g^{-1}(\mathbb{E}[g(X)])$$

ein Prämienprinzip, das isoton bezüglich der stochastischen Ordnung ist.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.2.6]. □

Definition 4.2.15. *Wir nennen* $\mathbb{H}$ *das* <u>*Mittelwert-Prinzip*</u> *bezüglich* g.

Bemerkung 4.2.16. *Im Fall* $g(x) = x$ *stimmt das Mittelwert-Prinzip mit dem Nettoprämien-Prinzip überein.*

Definition 4.2.17. *Im Fall* $g(x) = e^{\gamma x}$ *für ein* $\gamma \in (0,\infty)$ *nennen wir das Mittelwert-Prinzip das* <u>*Exponential-Prinzip*</u> *zum Parameter* γ. *In dem Fall gilt*

$$\mathbb{H}[X] = \frac{1}{\gamma} \ln\big(\mathbb{E}[e^{\gamma X}]\big).$$

Satz 4.2.18. *Es sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist die Abbildung $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \{X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) : g(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+), Xg(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})\\ \text{und } \mathbb{P}(X\mathbb{E}[g(X)] > \mathbb{E}[Xg(X)]) > 0\}\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{H}[X] := \frac{\mathbb{E}[Xg(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}$$

ein Prämienprinzip.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.2.7]. □

Definition 4.2.19. *Wir nennen $\mathbb{H}$ das Esscher-Prinzip bezüglich g.*

Bemerkung 4.2.20. *Beim Esscher-Prinzip gilt die Zerlegung*

$$\mathbb{H}[X] = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Cov}(X, g(X))}{\mathbb{E}[g(X)]} \quad \text{für alle } X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}.$$

Bemerkung 4.2.21. *Im Fall $g(x) = 1$ stimmt das Esscher-Prinzip mit dem Nettoprämien-Prinzip überein.*

Definition 4.2.22. *Im Fall $g(x) = x^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ wird das Esscher-Prinzip als Karlsruhe-Prinzip zum Parameter k bezeichnet.*

Satz 4.2.23. *Es sei $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ das Karlsruhe-Prinzip zum Parameter k.*

(a) Für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[X] = \frac{\mathbb{E}[X^{k+1}]}{\mathbb{E}[X^k]}.$$

(b) $\mathbb{H}$ ist positiv homogen.

(c) Im Fall $k = 1$ gilt für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$

$$\mathbb{H}[X] = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]}.$$

Beweis.

(a) ✓

(b) Für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ und alle $c \in (0, \infty)$ mit $cX \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[cX] = \frac{\mathbb{E}[(cX)^{k+1}]}{\mathbb{E}[(cX)^k]} = \frac{c^{k+1}\mathbb{E}[X^{k+1}]}{c^k\mathbb{E}[X^k]} = c\,\mathbb{H}[X].$$

(c) Für alle $X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt

$$\mathbb{H}[X] = \frac{\mathbb{E}[X^2]}{\mathbb{E}[X]} = \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]} + \frac{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]}.$$

□

Definition 4.2.24. *Im Fall $g(x) = e^{\gamma x}$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$ wird das Esscher-Prinzip als spezielles Esscher-Prinzip zum Parameter γ bezeichnet. Hierbei gilt*

$$\mathbb{H}[X] = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\gamma X}]}{\mathbb{E}[e^{\gamma X}]} \quad \textit{für alle } X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}.$$

4.3 Prämien und Verlustfunktionen

Im Folgenden sei $L : \mathscr{L} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung mit $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}^0(\mathbb{R}_+)$. Hierbei ist $L(X, a)$ der Verlust, der bei der Wahl der Prämie $a \in \mathbb{R}_+$ für das Risiko $X \in \mathscr{L}$ entsteht. Für ein Risiko $X \in \mathscr{L}$ betrachten wir die Verlustfunktion

$$L_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad L_X(a) := L(X, a).$$

Wir möchten den Minimierer $\mathbb{H} : \mathscr{L} \to \mathbb{R}_+$ bestimmen, so dass

$$L(X, \mathbb{H}[X]) = \min_{a \in \mathbb{R}_+} L(X, a) \quad \text{für alle } X \in \mathscr{L}.$$

Satz 4.3.1. *Für die Verlustfunktion $L : \mathscr{L} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\mathscr{L} = \mathscr{L}^2$ und*

$$L(X, a) = \mathbb{E}[(X - a)^2]$$

ist der Minimierer gegeben durch das Nettoprämien-Prinzip

$$\mathbb{H}[X] = \mathbb{E}[X]$$

eingeschränkt auf $\mathscr{L}^2$.

Beweis. Es sei $X \in \mathscr{L}$ beliebig. Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$L_X(a) = \mathbb{E}[(X - a)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2a\,\mathbb{E}[X] + a^2,$$

und daher

$$L_X'(a) = -2\,\mathbb{E}[X] + 2a,$$
$$L_X''(a) = 2.$$

□

Satz 4.3.2. *Es sei $\gamma \in \mathbb{R}_+$ beliebig. Für die Verlustfunktion $L : \mathscr{L} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $\mathscr{L} = \mathscr{L}^2$ und*

$$L(X, a) = \mathbb{E}[((1+\gamma)X - a)^2]$$

ist der Minimierer gegeben durch das Erwartungswert-Prinzip

$$\mathbb{H}[X] = (1+\gamma)\mathbb{E}[X]$$

eingeschränkt auf $\mathscr{L}^2$.

Beweis. Es sei $X \in \mathscr{L}$ beliebig. Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$L_X(a) = \mathbb{E}[((1+\gamma)X - a)^2] = \mathbb{E}[((1+\gamma)X)^2] - 2a(1+\gamma)\,\mathbb{E}[X] + a^2,$$

und daher

$$\begin{aligned} L'_X(a) &= -2(1+\gamma)\,\mathbb{E}[X] + 2a, \\ L''_X(a) &= 2. \end{aligned}$$

□

Satz 4.3.3. *Es sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine streng monoton wachsende, konvexe Funktion. Für die Verlustfunktion $L : \mathscr{L} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit*

$$\mathscr{L} = \{X \in \mathscr{L}^0(\mathbb{R}_+) : g(X) \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+)\}$$

und

$$L(X, a) = \mathbb{E}[(g(X) - g(a))^2]$$

ist der Minimierer gegeben durch das Mittelwert-Prinzip

$$\mathbb{H}[X] = g^{-1}(\mathbb{E}[g(X)])$$

definiert auf dem neuen Definitionsbereich $\mathscr{L}$.

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.3.3]. □

Satz 4.3.4. *Es sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine monoton wachsende Funktion. Für die Verlustfunktion $L : \mathscr{L} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit*

$$\mathscr{L} = \{X \in \mathscr{L}^0(\mathbb{R}_+) : g(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+), X^2 g(X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) \text{ und } \mathbb{E}[g(X)] > 0\}$$

und

$$L(X, a) = \mathbb{E}[(X - a)^2 g(X)]$$

ist der Minimierer gegeben durch das Esscher-Prinzip

$$\mathbb{H}[X] := \frac{\mathbb{E}[Xg(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]}$$

definiert auf dem neuen Definitionsbereich $\mathscr{L}$.

Bemerkung 4.3.5. *Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt*

$$Xg(X) = X\sqrt{g(X)} \cdot \sqrt{g(X)} \in \mathscr{L}^1,$$

da $X\sqrt{g(X)} \in \mathscr{L}^2$ *und* $\sqrt{g(X)} \in \mathscr{L}^2$.

Beweis von Satz 4.3.4. Es sei $X \in \mathscr{L}$ beliebig. Für alle $a \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$L_X(a) = \mathbb{E}[(X-a)^2 g(X)] = \mathbb{E}[X^2 g(X)] - 2a\,\mathbb{E}[Xg(X)] + a^2\mathbb{E}[g(X)],$$

und daher

$$L_X'(a) = -2\,\mathbb{E}[Xg(X)] + 2a\,\mathbb{E}[g(X)],$$
$$L_X''(a) = 2\,\mathbb{E}[g(X)].$$

□

4.4 Prämien und Nutzenfunktionen

Definition 4.4.1. *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $u : J \to \mathbb{R}$ heißt Nutzenfunktion, wenn sie streng monoton wachsend und konkav ist.*

Lemma 4.4.2. *Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, und es sei $X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+)$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] > 0$ und $u(-X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.*

(a) Die Funktion

$$U_X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad U_X(a) := \mathbb{E}[u(a-X)]$$

ist eine Nutzenfunktion.

(b) Im Fall $\sup_{a\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}[u(a-X)] > u(0)$ besitzt die Gleichung

$$\mathbb{E}[u(a-X)] = u(0)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $a^* \in \mathbb{R}_+$, und es gilt $\mathbb{E}[X] \le a^*$.

Beweis. Siehe [Sch06, Lemma 10.4.1]. □

Definition 4.4.3. *Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion. Wir nennen die Abbildung $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch*

$$\mathscr{L}^{\mathbb{H}} := \Big\{X \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}_+) : u(-X) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}), \sup_{a\in\mathbb{R}_+} \mathbb{E}[u(a-X)] > u(0)$$
$$\text{und } \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) > 0\Big\}$$

und

$$\mathbb{E}[u(\mathbb{H}[X] - X)] = u(0)$$

das Nullnutzen-Prinzip bezüglich u.

Satz 4.4.4. *Das Nullnutzen-Prinzip ist ein Prämienprinzip.*

Beweis. Siehe [Sch06, Satz 10.4.2]. □

Beispiel 4.4.5. *Dass Nullnutzen-Prinzip bezüglich $u(x) = x$ stimmt mit dem Nettoprämienprinzip überein. In der Tat, die Gleichung*

$$\mathbb{E}[\mathbb{H}[X] - X] = 0$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$\mathbb{H}[X] = \mathbb{E}[X].$$

Beispiel 4.4.6. *Dass Nullnutzen-Prinzip bezüglich*

$$u(x) = \frac{1}{\gamma}(1 - e^{-\gamma x})$$

für ein $\gamma \in (0, \infty)$ stimmt mit dem Exponential-Prinzip überein. In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\gamma}\mathbb{E}\big[1 - e^{-\gamma(\mathbb{H}[X]-X)}\big] = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 1 = e^{-\gamma\mathbb{H}[X]}\mathbb{E}\big[e^{\gamma X}\big] \\ \Leftrightarrow\ & e^{\gamma\mathbb{H}[X]} = \mathbb{E}\big[e^{\gamma X}\big] \\ \Leftrightarrow\ & \mathbb{H}[X] = \frac{1}{\gamma}\ln\big(\mathbb{E}[e^{\gamma X}]\big). \end{aligned}$$

4.5 Die Aufteilung der Prämie

Definition 4.5.1. *Ein Prämienprinzip $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ heißt additiv, falls für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $\sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt*

$$\mathbb{H}\Bigg[\sum_{i=1}^m X_i\Bigg] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].$$

Satz 4.5.2. *Folgende Prämienprinzipien sind additiv:*

(a) Das Nettoprämien-Prinzip.

(b) Das Erwartungswert-Prinzip.

(c) Das Varianz-Prinzip.

(d) Das Exponential-Prinzip.

(e) Das spezielle Esscher-Prinzip.

Beweis.

(a) Beim Nettoprämien-Prinzip gilt

$$\mathbb{H}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].$$

(b) Beim Erwartungswert-Prinzip gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] &= (1+\gamma)\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] = (1+\gamma)\sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^m (1+\gamma)\mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].\end{aligned}$$

(c) Beim Varianz-Prinzip gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] + \gamma\operatorname{Var}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] + \gamma\sum_{i=1}^m \operatorname{Var}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \gamma\operatorname{Var}[X_i]\big) = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].\end{aligned}$$

(d) Beim Exponential-Prinzip gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] &= \frac{1}{\gamma}\ln\Big(\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\gamma\sum_{i=1}^m X_i\Big)\Big]\Big) = \frac{1}{\gamma}\ln\Big(\mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^m e^{\gamma X_i}\Big]\Big) \\ &= \frac{1}{\gamma}\ln\Big(\prod_{i=1}^m \mathbb{E}[e^{\gamma X_i}]\Big) = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^m \ln\big(\mathbb{E}[e^{\gamma X_i}]\big) = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].\end{aligned}$$

(e) Beim speziellen Esscher-Prinzip gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\Big[\sum_{i=1}^m X_i\Big] &= \frac{\mathbb{E}[(X_1+\ldots+X_m)e^{\gamma(X_1+\ldots+X_m)}]}{\mathbb{E}[e^{\gamma(X_1+\ldots+X_m)}]} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{E}[X_i\prod_{j=1}^m e^{\gamma X_j}]}{\mathbb{E}[\prod_{j=1}^m e^{\gamma X_j}]} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\gamma X_i}]\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m \mathbb{E}[e^{\gamma X_j}]}{\prod_{j=1}^m \mathbb{E}[e^{\gamma X_j}]} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbb{E}[X_i e^{\gamma X_i}]}{\mathbb{E}[e^{\gamma X_i}]} = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].\end{aligned}$$

□

Definition 4.5.3. *Ein Prämienprinzip $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ heißt* <u>*subadditiv*</u>*, falls für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $\sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt*

$$\mathbb{H}\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].$$

Bemerkung 4.5.4. *Jedes additive Prämienprinzip ist auch subadditiv.*

Satz 4.5.5. *Das Standardabweichungs-Prinzip ist subadditiv.*

Beweis. Beim Standardabweichungs-Prinzip gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] + \gamma \sqrt{\operatorname{Var}\left[\sum_{i=1}^m X_i\right]} \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] + \gamma \sqrt{\sum_{i=1}^m \operatorname{Var}[X_i]} \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] + \gamma \sum_{i=1}^m \sqrt{\operatorname{Var}[X_i]} \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E}[X_i] + \gamma \sqrt{\operatorname{Var}[X_i]}\right) = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die elementare Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}_+$$

benutzt. □

Definition 4.5.6. *Bei einem Prämienprinzip $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ findet ein* <u>*Ausgleich im Kollektiv*</u> *statt, falls für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $\sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt*

$$\mathbb{H}\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] < \sum_{i=1}^m \mathbb{H}[X_i].$$

Bemerkung 4.5.7. *Bei additiven Prämienprinzipien findet kein Ausgleich im Kollektiv statt.*

Bemerkung 4.5.8. *Prämienprinzipien, bei denen ein Ausgleich im Kollektiv stattfindet, sind subadditiv, aber bei einem subadditiven Prämienprinzip braucht nicht unbedingt ein Ausgleich im Kollektiv stattzufinden.*

Definition 4.5.9. *Für ein Prämienprinzip $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ bezeichnen wir mit*

$$\mathbb{R} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{R}[X] := \mathbb{H}[X] - \mathbb{E}[X]$$

den Sicherheitszuschlag.

Satz 4.5.10. *Es sei $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ ein Prämienprinzip mit $\mathscr{L}^{\mathbb{H}} \subset \mathscr{L}^2$, und es seien $X_1, \ldots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ (nicht notwendigerweise unabhängige) Zufallsvariablen mit $S := \sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$. Dann gilt die Zerlegung*

$$\mathbb{H}[S] = \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \alpha_i \mathbb{R}[S]\big),$$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ definiert sind durch

$$\alpha_i := \frac{\operatorname{Cov}(X_i, S)}{\operatorname{Var}[S]}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Beweis. Es gilt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

und daher

$$\mathbb{H}[S] = \mathbb{E}[S] + \mathbb{R}[S] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[X_i] + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{R}[S] = \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \alpha_i \mathbb{R}[S]\big).$$

□

Definition 4.5.11. *Wir bezeichnen die Zerlegung des Gesamtschadens aus Satz 4.5.10 als Zerlegung nach dem Kovarianz-Prinzip.*

Bemerkung 4.5.12. *Sind die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ unabhängig, dann gilt*

$$\alpha_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, m,$$

wobei

$$\sigma_i^2 = \operatorname{Var}[X_i], \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2.$$

Also gilt insbesondere $\alpha_i \in (0, 1)$ für alle $i = 1, \ldots, m$.

Bemerkung 4.5.13. *Sind die Zufallsvariablen* $X_1, \dots, X_m$ *unabhängig und identisch verteilt, dann gilt*

$$\alpha_i = \frac{1}{m} \quad \textit{für alle } i = 1, \dots, m.$$

Satz 4.5.14. *Es sei* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *das Varianz-Prinzip mit einem Parameter* $\gamma \in \mathbb{R}_+$. *Für unabhängige Zufallsvariablen* $X_1, \dots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *mit* $S := \sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *gilt*

$$\mathbb{H}_\gamma[S] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}_\gamma[X_i].$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\gamma[S] &= \mathbb{E}[S] + \gamma \operatorname{Var}[S], \\ \mathbb{R}[S] &= \gamma \operatorname{Var}[S]. \end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 4.5.10

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_\gamma[S] &= \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \alpha_i \mathbb{R}[S]\big) = \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}\mathbb{R}[S]\right) = \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \sigma_i^2 \gamma\big) \\ &= \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \gamma \operatorname{Var}[X_i]\big) = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}_\gamma[X_i]. \end{aligned}$$

□

Korollar 4.5.15. *Beim Varianz-Prinzip findet kein Ausgleich im Kollektiv statt.*

Beweis. Folgt aus Satz 4.5.14. □

Satz 4.5.16. *Es sei* $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ *das Standardabweichungs-Prinzip mit einem Parameter* $\gamma \in \mathbb{R}_+$. *Für unabhängige Zufallsvariablen* $X_1, \dots, X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *mit* $S := \sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ *gilt*

$$\mathbb{H}_\gamma[S] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}_{\gamma_i}[X_i],$$

wobei

$$\gamma_i = \gamma \sqrt{\frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\gamma[S] &= \mathbb{E}[S] + \gamma\sqrt{\mathrm{Var}[S]},\\ \mathbb{R}_\gamma[S] &= \gamma\sqrt{\mathrm{Var}[S]}.\end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 4.5.10

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\gamma[S] &= \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \alpha_i \mathbb{R}_\gamma[S]\big) = \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}\mathbb{R}_\gamma[S]\right) = \sum_{i=1}^m \left(\mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sigma}\gamma\right)\\ &= \sum_{i=1}^m \big(\mathbb{E}[X_i] + \gamma_i\sqrt{\mathrm{Var}[X_i]}\big) = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}_{\gamma_i}[X_i].\end{aligned}$$

□

Korollar 4.5.17. *Beim Standardabweichungs-Prinzip mit Parameter $\gamma \in (0,\infty)$ findet ein Ausgleich im Kollektiv statt.*

Beweis. Folgt aus Satz 4.5.16, da $\gamma_i < \gamma$ für alle $i = 1,\dots,m$ und

$$\mathbb{H}_\gamma[X] < \mathbb{H}_\delta[X], \quad X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$$

für alle $\gamma, \delta \in \mathbb{R}_+$ mit $\gamma < \delta$. □

Das Karlsruhe-Prinzip mit $k = 1$ ist nach Satz 4.2.23(c) gegeben durch

$$\mathbb{H}[X] = \mathbb{E}[X] + \frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]}, \quad X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}.$$

Wir betrachten etwas allgemeiner für alle $\gamma \in [0,1]$

$$\mathbb{H}_\gamma[X] := \mathbb{E}[X] + \gamma\frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathbb{E}[X]}, \quad X \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}.$$

Satz 4.5.18. *Es sei $\mathbb{H} : \mathscr{L}^{\mathbb{H}} \to \mathbb{R}_+$ das Karlsruhe-Prinzip mit $k = 1$. Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1,\dots,X_m \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ mit $S := \sum_{i=1}^m X_i \in \mathscr{L}^{\mathbb{H}}$ gilt*

$$\mathbb{H}[S] = \sum_{i=1}^m \mathbb{H}_{\gamma_i}[X_i],$$

wobei

$$\gamma_i = \frac{\mu_i}{\mu}, \quad i = 1,\dots,m$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_i &= \mathbb{E}[X_i], \quad i = 1,\dots,m,\\ \mu &= \sum_{i=1}^m \mu_i.\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{H}[S] = \mathbb{E}[S] + \frac{\mathrm{Var}[S]}{\mathbb{E}[S]},$$
$$\mathbb{R}[S] = \frac{\mathrm{Var}[S]}{\mathbb{E}[S]}.$$

Also folgt mit Satz 4.5.10

$$\begin{aligned}\mathbb{H}[S] &= \sum_{i=1}^{m} \big(\mathbb{E}[X_i] + \alpha_i \mathbb{R}[S]\big) = \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\sigma^2}\mathbb{R}[S]\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbb{E}[X_i] + \frac{\sigma_i^2}{\mu}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\mathbb{E}[X_i] + \gamma_i \frac{\mathrm{Var}[X_i]}{\mathbb{E}[X_i]}\right) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{H}_{\gamma_i}[X_i].\end{aligned}$$

□

Korollar 4.5.19. *Beim Karlsruhe-Prinzip mit $k = 1$ findet ein Ausgleich im Kollektiv statt.*

Beweis. Folgt aus Satz 4.5.18. □

Literaturverzeichnis

[AA10] Asmussen, S. ; Albrecher, H.: *Ruin Probabilities.* World Scientific, New Jersey, 2010

[BOS17] Blath, J. ; Ortgiese, M. ; Scheutzow, M.: *Versicherungsmathematik.* 2017. – Vorlesungsmanuskript aus dem WS 2016/17, Technische Universität Berlin und Universität Bath

[EKM97] Embrechts, P. ; Klüppelberg, C. ; Mikosch, T.: *Modelling Extremal Events.* Springer-Verlag, Berlin, 1997

[Ger86] Gerber, H. U.: *Lebensversicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 1986

[Ger95] Gerber, H. U.: *Life Insurance Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1995

[GHM+16] Goelden, H.-W. ; Hess, K. T. ; Morlock, M. ; Schmidt, K. D. ; Schröter, K. J.: *Schadenversicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 2016

[Gra91] Grandell, J.: *Aspects of Risk Theory.* Springer-Verlag, New York, 1991

[Kel91] Kellsion, S. G.: *The Theory of Interest.* McGraw-Hill, Boston, 1991

[Klü04] Klüppelberg, C.: *Risikotheorie.* 2004. – Vorlesungsmanuskript aus dem SS 2004, Technische Universität München

[Kol10] Koller, M.: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Springer-Verlag, Berlin, 2010

[MH99] Milbrodt, H. ; Helbig, M.: *Mathematische Methoden der Personenversicherung.* Walter de Gruyter, Berlin, 1999

[Mik10] Mikosch, T.: *Non-life Insurance Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2010

[Rie05] Riedle, M.: *Risikotheorie.* 2005. – Vorlesungsmanuskript, Humboldt-Universität zu Berlin

[RSST99] Rolski, T. ; Schmidli, V. ; Schmidt, V. ; Teugels, J.: *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* Wiley Series, Chichester, 1999

[Sch96] Schmidt, K. D.: *Lectures on Risk Theory.* Springer Vieweg, Stuttgart, 1996

[Sch06] Schmidt, K. D.: *Versicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 2006

[Tap19] Tappe, S.: *Versicherungsmathematik.* 2019. – Vorlesungsmanuskript aus dem WS 2018/19, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg