Übungen zur Vorlesung **Risikotheorie**

Blatt 4

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – SS 2019

Aufgabe 1. Es sei F die Verteilungsfunktion einer nichtnegativen Zufallsvariablen $X \geq 0$, so dass $\mathbb{E}[X^n] = \infty$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X \in \mathscr{K}$.

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha) \in \mathscr{K}$ für alle $\kappa, \alpha > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{WB}(c, \tau) \in \mathscr{K}$ für alle $c > 0$ und $\tau \in (0, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Exp}(\beta) \notin \mathscr{K}$ für alle $\beta > 0$.

Aufgabe 3. Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, so dass $F(0) = 0$. Wir fixieren ein beliebiges $u \in [0, t_{\max})$ und setzen

$$Y := X - u \quad \text{und} \quad Z := Y \mathbb{1}_{\{Y>0\}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$e_F(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \mathbb{E}[Z].$$

(b) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F_Y von Y gegeben ist durch

$$F_Y(y) = F(u + y) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F_Z von Z gegeben ist durch

$$F_Z = F_Y \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}.$$

(d) Zeigen Sie, dass

$$e_F(u) = \frac{1}{\bar{F}(u)} \int_u^\infty \bar{F}(x)dx.$$

(e) Folgern Sie, dass im Fall $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$ gilt

$$e_F(u) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ mit Parametern $\kappa, \alpha > 0$, und bezeichnen mit F deren Verteilungsfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass $F \in \mathscr{R}$.

(b) Es sei $X \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ eine Pareto-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass im Fall $\alpha > 1$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha\kappa}{\alpha - 1},$$

und dass im Fall $\alpha \in (0, 1]$ gilt

$$\mathbb{E}[X] = \infty.$$

(c) Von nun an nehmen wir an, dass $\alpha > 1$, und definieren die Verteilungsfunktion $F_I : \mathbb{R} \to [0, 1]$ durch $F_I(x) := 0$ für $x < 0$ und

$$F_I(x) := \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

wobei $\mu := \mathbb{E}[X]$ mit $X \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$. Zeigen Sie, dass

$$F_I(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0] \\ \frac{\alpha-1}{\alpha\kappa} x, & \text{falls } x \in [0, \kappa], \\ 1 - \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha} x^{1-\alpha}, & \text{falls } x \in [\kappa, \infty), \end{cases}$$

und folgern Sie daraus

$$\bar{F}_I(x) = \frac{\kappa^{\alpha-1}}{\alpha} x^{1-\alpha} \quad \text{für alle } x \in [\kappa, \infty)$$

sowie $F_I \in \mathscr{R}$.

(d) Nun betrachten wir das Cramér-Lundberg-Modell mit Schadenhöhen $X_n \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Nettogewinnbedingung genau dann erfüllt ist, wenn

$$c > \frac{\lambda\alpha\kappa}{\alpha - 1}.$$