Übungen zur Vorlesung **Risikotheorie**

Blatt 3

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – SS 2019

Aufgabe 1. Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$, so dass $F(0) = 0$.

(a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ absolutstetig mit $\varphi' \geq 0$ fast überall. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \varphi(0) + \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $p \in (0,\infty)$ gilt

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty px^{p-1}\bar{F}(x)dx.$$

(c) Folgern Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx.$$

Aufgabe 2. Das Ziel dieser Übungsaufgabe besteht darin, einige Details für den Beweis von Satz 1.2.12 aufzuzeigen. Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg-Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t\in[0,T]} |f(t)| < \infty \quad \text{für alle } T \in \mathbb{R}_+.$$

<u>Hinweis:</u> Sie dürfen ohne Beweis folgendes Hilfsresultat benutzen. Zu jedem $T \in \mathbb{R}_+$ und jedem $\epsilon > 0$ existieren $N \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, so dass

$$\sup_{s,t\in[t_{n-1},t_n)} |f(t) - f(s)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } n = 1,\ldots,N.$$

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $T \in \mathbb{R}_+$ die Menge

$$\{|\Delta f| > \epsilon\} \cap [0, T]$$

endlich ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $\{\Delta f \neq 0\}$ höchstens abzählbar ist.

(d) Wir definieren die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ durch

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| > n\}.$$

Zeigen Sie, dass $T_n \uparrow \infty$.

(e) Es gelte $\lim_{t\to\infty} f(t) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| < \infty.$$

(f) Es gelte $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = c$ für ein $c \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass ein $C \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass

$$\inf_{t\in\mathbb{R}_+} f(t) \geq -C.$$

Aufgabe 3. Es sei J ein Intervall.

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ absolutstetig im Sinne von Definition 1.2.19 ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede absolutstetige Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten die partielle Integrationsformel aus Satz 1.2.22.

(a) Zeigen Sie, dass wir beim Beweis der Formel

$$\int_{(a,b]} Y(s)\, X(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(s-)\, Y(ds)$$

davon ausgehen dürfen, dass X und Y monoton wachsend sind.

(b) Beweisen Sie die Formel

$$\int_{(a,b]} Y(s)\, X(ds) = X(b)Y(b) - X(a)Y(a) - \int_{(a,b]} X(s)\, Y(ds),$$

sofern X oder Y stetig ist.