Übungen zur Vorlesung **Risikotheorie**

Blatt 2

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – SS 2019

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgende Hilfsresultate aus der Vorlesung:

(a) Lemma 1.1.5

(b) Lemma 1.1.8

Aufgabe 2. Beweisen Sie Satz 1.1.12 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3. Es seien $(\Omega, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ zwei messbare Räume. Weiterhin sei $K : \Omega_1 \times \mathscr{F}_2 \to [0,1]$ eine Abbildung, so dass gilt:

(1) Es existiert ein $\cap$-stabiles Mengensystem $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}_2$ mit $\Omega_2 \in \mathscr{E}$, so dass $\mathscr{F}_2 = \sigma(\mathscr{E})$ und $\omega_1 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ eine $\mathscr{F}_1$-messbare Abbildung für jedes $A_2 \in \mathscr{E}$ ist.

(2) Für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ ist $A_2 \mapsto K(\omega_1, A_2)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$.

Zeigen Sie, dass K ein stochastischer Kern von $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ ist.

Aufgabe 4. Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(a) Zeigen Sie, dass $M(t) = \lambda t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[R_t] = \frac{1}{\lambda}$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(c) Zeigen Sie ohne Anwendung von Satz 1.1.27, dass

$$\lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$