Übungen zur Vorlesung
"Analysis II"

Musterlösung, Blatt 12

Aufgabe 1

(a) Wir berechnen zunächst die Ableitung als

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2x+2y^2 & 1+4xy+4y^3 \end{pmatrix}.$$

Um nun festzustellen, für welche x, y die Ableitung $f'(x,y)$ invertierbar ist, berechnen wir die Determinante und erhalten

$$\det f'(x,y) = 1+4xy+4y^3-(2y)(2x+2y^2) = 1+4xy+4y^3-4xy-4y^3 = 1 \neq 0.$$

Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ lokal invertierbar.

(b) Nach (a) ist f in jedem Punkt in $\mathbb{R}^2$ lokal umkehrbar, es bleibt zu zeigen, dass f injetiv ist, damit es global umkehrbar ist. Dazu wähle $(x_1,y_1)^\top, (x_2,y_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2$. Umformen ergibt dann, dass $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gelten muss, womit f injektiv und somit global umkehrbar ist.

(c) Gilt $f(x,y) = (a,b)^\top$, so gilt $x+y^2 = a$ und $y+x^2+2xy^2+y^4 = b$. Formt man die erste Gleichung nach x um und setzt diese Darstellung in die zweite Gleichung ein, erhält man $y = b-a^2$. Setzt man das wiederum in die erste Identität, erhält man $x = -a^4+2a^2b+a-b^2$. Zusammengesetzt also

$$f^{-1}(a,b) = (-a^4+2a^2b+a-b^2, b-a^2).$$

Aufgabe 2

Hier wollen wir die Funktion $f(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}$ maximieren bzw. minimieren. Aufgrund der Monotonie der Wurzel maximieren bzw. minimieren wir stattdessen f^2. Die Nebenbedingung dabei ist, dass $g(x,y,z) = 0$ mit $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. Die Lagrange-Bedingungen lauten nun, dass

$$\frac{\partial f^2}{\partial x} = 2(x-1) = 2\lambda x = \lambda \frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f^2}{\partial y} = 2(y-1) = 2\lambda y = \lambda \frac{\partial g}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f^2}{\partial z} = 2(z-1) = 2\lambda z = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Um all diese Gleichheiten simultan zu erfüllen, muss $x = y = z = \frac{1}{1-\lambda}$ gelten. Setzen wir das in die Nebenbedingung ein, erhalten wir die Gleichung $3x^2 = 1$. Die kritischen Punkte sind also

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^\top.$$

Geometrisch ist dann sofort klar, dass der erste das Distanzmaximum, der zweite das Distanzminimum zu $(1,1,1)^\top$ ist. Außerdem wissen wir, dass f auf der Kugeloberfläche ein Maximum und Minimum annehmen muss, da es sich um eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge handelt (die Kompaktheit sieht man leicht über Abgeschlossenheit und Beschränktheit ein).

Aufgabe 3

Wir zeigen zunächst die zweite Ungleichung. Da die Funktion $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ auf der kompakten Menge $\overline{E}$ mit E wie im Hinweis ihr Maximum annimmt und dieses nicht auf $\overline{E} \setminus E$ liegen kann, nimmt f ein Maximum auf E an. Wir wollen nun einen Vektor λ finden, sodass

$$\mathrm{grad} f(x_0) - \lambda^\top g'(x_0) = 0,$$

wobei $x_0 \in E$ so gewählt sei, dass $f'(x_0)$ vollen Rang hat. Es gilt offenbar $\mathrm{grad}(g) = (1, \ldots, 1)$. Dadurch kann man diese Bedingung umschreiben zu

$$\prod_{j \neq i} x_j = \frac{1}{x_i} \prod_{j=1}^{n} x_j = \lambda$$

für alle $i = 1, \ldots n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dies ist nur dann für alle i simultan lösbar, wenn jeweils gilt $x_i = \frac{1}{\lambda}$. Damit $(x_1, \ldots, x_n)^\top \in E$ liegt, muss also gelten $x_i = \frac{1}{n}$. Damit gilt

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Nun betrachten wir $z_1, \ldots, z_n > 0$. Dann folgt mit dem eben bewiesenen und $z := z_1 + \cdots + z_n$, dass

$$\frac{z_1}{z} \cdots \frac{z_n}{z} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n,$$

also

$$(z_1 \cdots z_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n).$$

Für die erste Ungleichung wenden wir die zweite mit den Zahlen $\frac{1}{z_1}, \ldots \frac{1}{z_n}$ an und erhalten

$$\frac{1}{(z_1 \cdots z_n)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_n}}{n}.$$

Bilden des Kehrbruch liefert die Behauptung.