Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 8

Abgabetermin: Freitag, 28.06.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(E, ||\cdot||)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie:

(a) Für $x \in E$ und $\epsilon > 0$ ist die ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x)$ offen.

(b) Für $x \in E$ und $\epsilon > 0$ ist $\overline{U_\epsilon(x)} := \{z \in E \mid ||x - z|| \leq \epsilon\}$ abgeschlossen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche der folgenden Identitäten gelten für beliebige Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$? Beweisen Sie Ihre Behauptungen (gegebenenfalls durch Angabe eines Gegenbeispiels).

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(c) $\overline{A^\circ} = \overline{A}$.

(d) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Das offene Intervall $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

(b) Jede endliche Menge in $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ ist kompakt.

(c) Ist A kompakt und $S \subset A$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist auch S kompakt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei E ein Vektorraum und $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ seien zwei Normen auf E. Wir definieren das Mengesystem der offenen Mengen für diese Normen als

$$\mathcal{O}_i := \{A \subset E \mid A \text{ ist offen bezüglich des Umgebungsbegriffs mit der Norm } ||\cdot||_i\}.$$

Zeigen Sie, dass $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ genau dann äquivalent sind, wenn $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ gilt, d.h. die beiden Normen die gleichen offenen Mengen erzeugen.