Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 7

Abgabetermin: Freitag, 21.06.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\text{(a)}\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \quad \text{(b)}\ \int_0^3 \frac{1}{x}dx, \quad \text{(c)}\ \int_3^\infty \frac{4+x}{x^3}dx, \quad \text{(d)}\ \int_0^\infty e^{-\pi x}dx.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $R([a,b]) \subset B([a,b])$ der Raum aller beschränkten Riemann-integrierbaren Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $(R([a,b]), ||\cdot||_{\sup})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei X eine Menge. Dann heißt eine Funktion $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt, dass

(1) $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X,d) heißt dann *metrischer Raum*. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in X$ gilt $d(x,y) \geq 0$.

(b) Jeder normierte Vektorraum $(E, ||\cdot||)$ ist mit $d(x,y) = ||x-y||$ ein metrischer Raum.

(c) Es sei A eine endliche Menge. Für $a, b \in A^n$ definieren wir die *Hamming-Distanz* d als Anzahl der Einträge, an denen sich die Tupel unterscheiden, d.h.

$$d(a,b) := |\{1 \leq i \leq n \mid a_i \neq b_i\}|.$$

Zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine Metrik handelt.

(d) Betrachten Sie den Raum $C([0,\infty))$ der stetigen Funktionen $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ und

$$d(f,g) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sup_{x\in[0,k]} |f(x)-g(x)| \wedge 1}{2^k},$$

wobei $a \wedge b := \min(a,b)$. Zeigen Sie, dass es sich bei d um eine Metrik handelt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $p \in \mathbb{N}$. Für eine Folge reeller Zahlen $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definieren wir

$$||x||_{l^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

und

$$l^p(\mathbb{R}) := \{x \text{ Folge reeller Zahlen}: \ ||x||_{l^p} < \infty\}.$$

Zeigen Sie, dass es sich bei $||\cdot||_{l^p}$ um eine Norm handelt und dass mit dieser $(l^p(\mathbb{R}), ||\cdot||_{l^p})$ ein Banachraum ist.

Beginn Bonusaufgaben:

Es seien $f, \alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ sei eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ mit zugehörigem Stützwertvektor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$. Dann definieren wir die *Riemann-Stieltjes-Summe* als

$$S_\alpha(f, Z, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right).$$

Konvergiert die Folge $(S_\alpha(f, Z_n, \xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für jede Folge von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$, so nennen wir den Grenzwert *Riemann-Stieltjes-Integral* von f bezüglich α und schreiben hierfür

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Es sei $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es seien $f, \alpha' : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen in $R([a,b])$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall für alle Zerlegungen Z_n mit $|Z_n| \to 0$ die Riemann-Stieltjes-Summen konvergieren und dass gilt

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein $\eta_j \in [x_{j-1}, x_j]$ sodass $\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1}) = \alpha'(\eta_j)(x_j - x_{j-1})$.

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)

(a) Berechnen Sie die folgenden Riemann-Stieltjes-Integrale:

$$\text{(a)} \int_0^1 x dx^2, \quad \text{(b)} \int_0^\pi e^x d\sin(x).$$

(b) Es sei $\lfloor x \rfloor : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Abrundungsfunktion, d.h. jedes $x \in \mathbb{R}_{\geq}$ wird auf die größte ganze Zahl m abgebildet mit $m \leq x$. Sei weiter $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie für $a > 0$, dass

$$\int_0^a f(x) d\lfloor x \rfloor$$

existiert und berechnen Sie dieses Integral.