Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 31.05.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

HINWEIS: Nutzen Sie die Additionstheoreme, um $\sin(2x)$ umzuformen und berechnen Sie dann zunächst $\sin(\frac{\pi}{4})^2$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei f über jedes Intervall $[0, a]$, $a > 0$, Riemann-integrierbar und es gelte $f(x) \to c \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \to c \qquad \text{für } a \to \infty.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien f, g reellwertige Funktionen, welche auf dem Intervall $[a, b]$ Riemann-integrierbar sind, und es sei entweder $g(x) \geq 0$ oder $g(x) \leq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es eine Zahl μ mit $\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)$, sodass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

HINWEIS: Betrachten Sie die Fallunterscheidung, dass $\int_a^b g(x)dx = 0$ und $\neq 0$ und überlegen Sie sich im letzteren Fall, wie μ aussehen muss.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es sei eine Folge von Funktionen definiert durch

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) := 2nxe^{-nx^2}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ nicht gleichmäßig, aber punktweise gegen die konstante Nullfunktion $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ konvergiert und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Zeigen Sie für $|x| < 1$, dass

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t}dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n(t) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k$.