Übungen zur Vorlesung
"Analysis II"

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 24.05.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben, sowie die Zerlegungen $Z_n = \left(0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{(n-1)a}{n}, a\right)$, $n \in \mathbb{N}$, des Intervalls $[0, a]$. Zeigen Sie, dass für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ die Ober- und Untersummen $\overline{S}(Z_n, f)$ bzw. $\underline{S}(Z_n, f)$ für $n \to \infty$ gegen den gemeinsamen Grenzwert $\frac{1}{3}a^3$ konvergieren.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $Z = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und es seien $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) := \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mathbb{1}_{[x_{k-1}, x_k)}(x)$$

heißt *Treppenfunktion*. Dabei gilt für $x \in A$, dass $\mathbb{1}_A(x) = 1$, und $\mathbb{1}_A(x) = 0$, falls $x \notin A$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x) = c_k$ für $x \in [x_{k-1}, x_k)$, f ist also *stückweise konstant*.

(b) Zeigen Sie, dass eine Treppenfunktion f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^n c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f \in B([a, b])$ eine beschränkte Funktion. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang zwischen dem oberen und dem unteren Riemann-Integral:

$$\underline{A}(f) = -\overline{A}(-f).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktionen φ und ψ seien differenzierbar auf $[\alpha, \beta]$ und ihr Bild ist Teilmenge von $[a, b]$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

und insbesondere, dass die linke Seite definiert ist.