Abteilung für Mathematische Stochastik — Sommersemester 2019
Prof. Dr. Angelika Rohde — Johannes Brutsche, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 17.05.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen. Untersuchen Sie ferner das Konvergenzverhalten auf dem Rand des Konvergenzintervalls.

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n, \qquad \text{(b)}\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} x^n.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir definieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Cosinus- und Sinusfunktion durch

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \dots,$$
$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Funktionen in der Tat für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert sind, die Reihen also auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass cos und sin für jedes $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar sind mit

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \quad \text{und} \quad (\sin(x))' = \cos(x).$$

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$

Hinweis: Beachten Sie, das $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien die Sinus- und Cosinusfunktion sin bzw. cos gegeben wie in Aufgabe 2.

(a) Beweisen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden *Additionstheoreme* gelten:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Funktionen $h(x) = \sin(x)\cos(x+y) - \cos(x)\sin(x+y)$ und $k(x) = \cos(x)\cos(x+y) + \sin(x)\sin(x+y)$ und ihre Ableitungen.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion cos eine *kleinste positive Nullstelle* besitzt, welche wir mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnen. Das heißt, es gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad \cos(x) > 0 \text{ in } \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Es gilt weiter, dass

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis mithilfe einer Taylorentwicklung von cos vom Grad 1 im Punkt $x_0 > 0$ mit Restglied. Was wissen Sie über das Wachstumsverhalten von cos und sin unter der Annahme, dass cos keine Nullstelle hat?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Umkehrfunktionen von cos und sin zu bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass die Sinusfunktion sin eine wohldefinierte Umkehrfunktion

$$\arcsin : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x & \mapsto \quad \arcsin(x), \end{cases}$$

besitzt, welche auf ihrem Definitionsbereich streng monton wachsend ist. Zeigen Sie ferner, dass arcsin auf $(-1,1)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass die Cosinusfunktion cos eine wohldefinierte Umkehrfunktion

$$\arccos : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow [0,\pi] \\ x & \mapsto \quad \arccos(x), \end{cases}$$

besitzt, welche auf ihrem Definitionsbereich streng monoton fallend ist. Zeigen Sie ferner, dass arccos auf $(-1,1)$ differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

Hinweis: Nutzen Sie die Additionstheoreme, um $\cos(\pi)$ zu bestimmen. Nutzen Sie diese auch, um etwas über $\sin(x)$ für $x \in [0,\pi]$ zu lernen.