Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die *Supremumsnorm* als

$$||f||_{\sup} := \sup_{x \in S} |f(x)|.$$

Sei nun eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, wenn

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{\sup} = 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : S \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass f genau dann beschränkt ist (d.h. $||f||_{\sup} < \infty$), wenn alle bis auf endlich viele der f_n beschränkt sind. Zeigen Sie insbesondere, dass in diesem Falle sogar die Abschätzung $||f_n||_{\sup} \leq K$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und eine gewisse Konstante $K > 0$ gilt. Warum ist dieser zweite Teil eine Verstärkung der Aussage?

Hinweis: Überlegen Sie sich für den zweiten Teil, dass für $|| \cdot ||_{\sup}$ eine Dreiecksungleichung wie für den gewöhnlichen Betrag $| \cdot |$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolgen beschränkter reellwertiger Funktionen auf S und $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Zahlenfolge. Weiter konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g und es gelte $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$.

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen fg konvergiert.
Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $||fg||_{\sup} \leq ||f||_{\sup} \cdot ||g||_{\sup}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(\alpha_n f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen αf konvergiert.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass in Teil (a) und (b) nicht auf die Voraussetzung der Beschränktheit verzichtet werden kann.
Hinweis: Die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ kann hier hilfreich sein.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen auf einem nichtleeren Intervall. Weiter nehmen wir an, dass es sich bei der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Cauchyfolge bezüglich der Supremumsnorm $||\cdot||_{\text{sup}}$ handelt, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ sodass } \forall m > n \geq n_0 : \ ||f_m - f_n||_{\text{sup}} < \epsilon.$$

Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.
Damit haben Sie in dieser Aufgabe gezeigt, dass der Raum $C([a,b],\mathbb{R})$ *der reellwertigen stetigen Funktionen auf* $[a,b]$ *vollständig bezüglich der Supremumsnorm* $||\cdot||_{sup}$ *ist.*