Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 12 (Bonus)

Abgabetermin: freiwillige Abgabe bis 26.07.2019

Aufgabe 1 (4 Bonuspunkte)

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) := (x + y^2, y + x^2 + 2xy^2 + y^4)^\top.$$

(a) An welchen Stellen ist f lokal umkehrbar?

(b) Ist f global umkehrbar?

(c) Falls f global umkehrbar ist, gibt es eine Umkehrfunktion. Bestimmen Sie diese im Falle globaler Umkehrbarkeit von f.

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte)

Bestimmen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, die von dem Punkt $(1, 1, 1)^\top \in \mathbb{R}^3$ den kleinsten beziehungsweise größten Abstand haben.

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte)

Seien $z_1, \dots, z_n > 0$. Wir betrachten das *arithmetische Mittel* $\frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n)$, das *geometrische Mittel* $(z_1 \cdots z_n)^{\frac{1}{n}}$ und das *harmonische Mittel*

$$\frac{n}{\frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_n}}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{n}{\frac{1}{z_1} + \cdots + \frac{1}{z_n}} \leq (z_1 \cdots z_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n).$$

Hinweis: Finden Sie für die zweite Ungleichung das Maximum der Funktion $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ auf $E := \{(x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n_{>0} \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$. Die erste Ungleichung können Sie dann aus der zweiten folgern.