Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 19.07.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, S offen, $f : S \to \mathbb{R}$ und $h = (h_1, \ldots, h_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für $f \in C^k(S)$ gilt

$$(\nabla h)^k f = \sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=k \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_n \geq 0}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} h_1^{\alpha_1} \cdots h_n^{\alpha_n} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Dabei erfolgt die Summation über alle n-Tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ mit $0 \leq \alpha_i \leq k$, $1 \leq i \leq k$ und $\sum_{i=1}^k \alpha_i = k$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, $f : S \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(S)$ und $\mathrm{grad} f(x_0) = 0$. Zeigen Sie: Ist die Hesse'sche Matrix von f im Punkt x_0 indefinit, so hat f im Punkt x_0 kein relatives Extremum.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und untersuchen Sie, ob dort ein Maximum oder Minimum vorliegt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien n beliebige Punkte $p_i = \left(x_1^{(i)}, \ldots, x_k^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \ldots, n$, gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte $p = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, sodass der mittlere quadratische Abstand

$$A(x_1, \ldots, x_k) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ||p_i - p||_2^2$$

minimiert wird.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) := (2e^{x_1} + x_2 y_1 - 4y_2 + 3, x_2 \cos(x_1) - 6x_1 + 2y_1 - y_3)^\top.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine offene Umgebung U von $(3, 2, 7)^\top \in \mathbb{R}^3$ und $g : U \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar existieren mit $g(3, 2, 7) = (0, 1)^\top$ und $f(g(y), y) = 0$ für alle $y \in U$.

(b) Berechnen Sie die Ableitung g' im Punkt $(3, 2, 7)^\top$.