Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 10

Abgabetermin: Freitag, 12.07.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitung erster und zweiter Ordnung von $f(x,y,z) = \frac{xye^y}{z}$.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Betragsfunktion gegeben durch $f(x) = ||x||_2$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ für $1 \leq i \leq n$, sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *homogen vom Grad* α, falls für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t > 0$ gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad α und darüber hinaus differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} x_n = \alpha f(x).$$

Hinweis: Betrachten Sie $\varphi(t) := f(tx)$ für festes x und berechnen Sie $\varphi'(1)$ auf zweierlei Arten.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen, welche in $\xi \in \mathbb{R}^n$ einen Gradienten besitzen (d.h. alle partiellen Ableitungen existieren). Zeigen Sie, dass die folgenden Gradienten dann ebenfalls in ξ existieren und bestimmen Sie sie:

(a) $\operatorname{grad}(f+g)(\xi)$, (b) $\operatorname{grad}(fg)(\xi)$, (c) $\operatorname{grad}(\alpha f)(\xi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$. Dann definieren wir den *Laplace-Operator* als

$$\Delta f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}.$$

(a) Es seien $f, g : U \to \mathbb{R} \in C^2(U)$ Funktionen. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(g)\rangle + g\Delta f.$$

Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarpodukt auf dem $\mathbb{R}^n$.

(b) Eine Funktion $f \in C^2(U)$ heißt *harmonisch*, falls $\Delta f = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass die Funktionen $\Phi_n : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi_n(x) := \begin{cases} \log(||x||_2) & \text{falls } n = 2, \\ ||x||_2^{2-n}, & \text{falls } n \geq 3, \end{cases}$$

harmonisch sind.