Übungen zur Vorlesung "Analysis II"

Blatt 1

Abgabetermin: Freitag, 03.05.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Euler'sche Zahl e irrational ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $e = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie das Taylorpolynom $T_q(1; 0, e^x)$ mit Lagrange-Restglied und leiten Sie damit einen Widerspruch her, wobei Sie die Abschätzung $2 < e < 3$ verwenden dürfen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Variante des Satzes von de l'Hôpital:
Es seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, welche auf (a, b) differenzierbar sind. Weiter gelte $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ und der Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiere. Dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \lim_{x \to \infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{x \to \infty} x^{\alpha} e^{-x}, \text{ mit } \alpha > 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig auf (a, b) ist.

(b) Finden Sie ein Beispiel, in dem f nicht auf ganz $[a, b]$ stetig ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ für $x \in \mathbb{R}$,

(b) $g_n(x) := \sqrt[n]{x}$ für $x \in [0, \infty)$.