

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe  
 Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi  
<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018>

## Übung 6

**Abgabe: 17.07.2018 zu Beginn der Vorlesung.**

Zunächst die folgende Definition:

**Definition:** Ein Maß  $\nu$  auf der Menge  $I \subset \mathbb{N}$  heißt reversibel bzgl. einer Übergangsmatrix  $P$ , wenn für  $\nu$  und  $P$  gilt:

$$\nu_i p_{ij} = \nu_j p_{ji} \quad \forall i, j \in I.$$

Im folgenden dürfen Sie nutzen, dass wenn  $\nu$  reversibel ist bzgl.  $P$ , dann ist  $\nu$  invariant für  $P$ .

**Aufgabe 1** (10 Punkte). (Irrfahrt auf einem Schachbrett)

Wir können ein Schachbrett als einen Graph auffassen, wobei wir die Menge der Knoten,

$$K = \{(u, v) : 1 \leq u, v \leq 8\},$$

in eine Matrix anordnen:

$$\begin{matrix} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \cdots & (1, 8) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \cdots & (2, 8) \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \cdots & (3, 8) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (8, 1) & (8, 2) & (8, 3) & \cdots & (8, 8) \end{matrix}$$

Die Menge der Kanten sei gegeben durch

$$V = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in K \times K : |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| = 1\}.$$

Die Punkte die durch eine Kante verbunden sind, sind benachbart. Die Nachbarn eines Knotens auf dem Graphen sind also gerade die Punkte die man durch Addieren oder Subtrahieren von 1 zu einer der Koordinaten erhält. (*Bitte wenden!*)

1. Eine einfache Irrfahrt auf dem Graphen ist eine Markov Kette, bei der das Teilchen sich einen neuen Zustand uniform unter den Nachbarn auswürfelt. Bestimmen Sie eine invariante Verteilung für die einfache Irrfahrt auf dem oben beschriebenen Graphen.
2. Nun modifizieren wir die Spielregeln. Das Teilchen wählt uniform eine der vier möglichen Richtungen. Es bewegt sich um einen Schritt in diese Richtung falls möglich. Ansonsten bleibt es stehen. Wie ändert sich die invariante Verteilung im Vergleich zu (a)?

3. Ein Springer kann von  $(v, u)$  aus zu einem der folgenden acht Felder ziehen (vorausgesetzt sie befinden sich auf dem Schachbrett):

$$(u + 2, v + 1), (u + 2, v - 1), (u + 1, v + 2), (u + 1, v - 2), \\ (u - 1, v + 2), (u - 1, v - 2), (u - 2, v + 1), (u - 2, v - 1).$$

Sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  die Folge der Felder, die entsteht, wenn man bei jedem Schritt einen von den legalen Springerzügen zufällig wählt. Bestimmen Sie die invariante Verteilung und die erwartete Anzahl von Zügen, die ein Springer braucht, um in  $(1, 1)$  startend nach  $(1, 1)$  zurückzukehren.