Markov-Ketten **SS 2018**

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018

Übung 5

Abgabe: 10.07.2018 zu Beginn der Vorlesung.

Für dieses Blatt kann Ihnen das folgende Theorem helfen:

Theorem: Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine irreduzible Markovkette. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Jeder Zustand ist positiv rekurrent

(ii) Ein Zustand ist positiv rekurrent

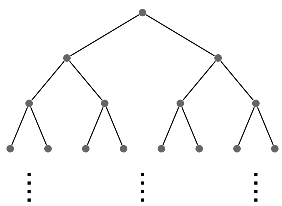
(iii) X hat eine invariante Verteilung π mit

$$\pi_i = \frac{1}{m_i}, \text{ für } i \in I,$$

wobei $m_i = \mu_{ii} = \mathbb{E}_i\left[\tau_i\right]$ ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** (Irrfahrt auf einem binären Baum)

Es sei $G = (V, E)$ der unten abgebildete binäre Baum mit Wurzel. Insbesondere hat jeder Knoten genau zwei "Nachkommen" und jeder Knoten außer der Wurzel genau einen "Vorfahren".



Ferner sei $X = (X_n)_{n=0,1,\ldots}$ eine einfache Irrfahrt auf G, d.h. zu jedem Zeitpunkt wird gleichmäßig unter den Nachbarn einer ausgewählt zu dem die Irrfahrt dann spring. Ist diese Irrfahrt transient oder rekurrent? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

G = Graph, V = Menge der Knoten/Ecken (engl. vertex/vertices), E = Menge der Kanten (engl. edges). Knoten die durch Kanten aus E direkt miteinander verbunden sind, werden als (nächste) Nachbarn bezeichnet

Bitte wenden

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** (Lebensdauer von Geräten)

Betrachten Sie eine Markovkette auf $\mathbb{N}_0$, die das aktuelle Lebensalter eines Gerätes, zum Beispiel einer Glühbirne, in Tagen modelliert. Ist das Gerät aktuell $k \in \mathbb{N}_0$ Tage alt, bleibt es mit Wahrscheinlichkeit p_k weiter im Gebrauch (das Alter ist dann $k+1$), oder es wird mit Wahrscheinlichkeit $1-p_k$ durch ein neues Gerät ersetzt, dessen Alter erneut bei 0 startet. Finden Sie Bedingungen die garantieren, dass

(a) 0 rekurrent ist;

(b) 0 positiv rekurrent ist.

(c) Finden Sie im positiv rekurrenten Fall die invariante Verteilung der Markovkette.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.**

Eine *doppelt-stochastische* Matrix $P = (p_{ij})_{i,j\in I}$ mit $N := |I| < \infty$ wird definert durch:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j \in I, \qquad \sum_{j=1}^{N} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i \in I.$$

Geben Sie eine Verteilung auf I an, die für alle doppelt-stochastischen Matrizen invariant ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{0,1\}^m$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{xy} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } |x-y| = 1 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $|x| = \sum_{k=1}^{m} |x_k|$.

(a) Ist X irreduzibel? Ist X aperiodisch?

(b) Berechnen Sie die invariante Verteilung von X.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

Wir betrachten eine einfache Irrfahrt auf einer Uhr mit den Zahlen $1,\ldots,12$. Sei also $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette die ausgehend von einem Punkt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ zu einer der benachbarten Zahlen auf der Uhr springt.

(a) Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Schritten die X benötigt um in den Ausgangspunkt zurückzukehren.

(b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X alle anderen Zustände besucht bevor es zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrt.