Markov-Ketten

SS 2018

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018

Übung 4

Abgabe: 26.06.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2 Punkte). Beweisen Sie Lemma 2.3.25 aus der Vorlesung:

Es sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine diskrete Zufallsvariable.Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte). Konzentration auf absorbierenden Zuständen:

Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit höchstens abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Die Zustände $e_1, e_2 \in E$ seien absorbierend und für alle $e \in E$ gelte $e \to e_1$ oder $e \to e_2$.

(a) Zeigen Sie, dass alle Zustände außer e_1 und e_2 transient sind.

(b) Bestimmen Sie eine Familie $(\pi^\alpha = (\pi_i^\alpha)_{i\in E})_{\alpha\in[0,1]}$ von Wahrscheinlichkeitsvektoren auf E (d.h. $\sum_{i\in E} \pi_i^\alpha = 1$) mit der Eigenschaft $\pi^\alpha = \pi^\alpha P$ für alle $\alpha \in [0, 1]$.

Wichtig: α ist kein Exponent sondern eine Variable von der die Verteilung abhängt.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Ausdünnung einer Markovkette:

Es sei $X = (X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit der Übergangsmatrix P. Ferner seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ positive, ganzzahlige unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die auch unabhängig von X sind. Setze $\tau_0 = 0$ sowie $\tau_n = \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n$, $n \geq 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\widetilde{X} = (\widetilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\widetilde{X} = X_{\tau_n}$ eine Markovkette ist. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix $\widetilde{P}$.

(b) Seien i und j zwei kommunizierende Zustände bzgl. der Übergangsmatrix P und es gelte für den Träger $M = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(\sigma_1 = i) > 0\}$ der Verteilung von σ_1, dass $\text{ggT}\{M\} = 1$. Zeigen Sie, dass die Zustände ebenfalls bzgl. der Übergangsmatrix $\widetilde{P}$ kommunizieren.

Hinweis: Eventuell hilft Ihnen dieses wohlbekannte Lemma:

Lemma 1. Sei $m \subset \mathbb{N}$ eine bzgl. der Addition abgeschlossene Menge mit $ggT(M) = 1$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n \in M$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Regenerationszyklen:

Es sei $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum. Die Startverteilung sei gegeben durch δ_i, wobei i ein positiv rekurrenter Zustand sei. Wir definieren eine Folge von Rückkehrzeiten nach i durch

$$\sigma_0 = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{k+1} = \inf\{n > \sigma_k : X_n = i\}, \; k \geq 1.$$

Bitte wenden

Zeigen Sie:

(a) $(\sigma_k)_{k\geq 0}$ ist eine Folge von Stoppzeiten.

(b) $(\sigma_{k+1} - \sigma_k)_{k\geq 0}$, ist eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen.

(c) Die Teilstücke der Pfade

$$(X_{\sigma_k}, \dots, X_{\sigma_{k+1}-1})_{k\geq 0}$$

sind unabhängig und identisch verteilt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Ehrenfest Modell:

Für ein $N \in \mathbb{N}$ sei $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $S = \{0, \dots, N\}$, und Übergangsmatrix $P = \big(p(i,j)\big)_{i,j\in S}$, wobei

$$p(i,i+1) = \frac{N-i}{N}, \quad p(i,i-1) = \frac{i}{N}.$$

1. Zeigen Sie, dass π mit $\pi(j) = 2^{-N}\binom{N}{j}$ eine invariante Verteilung der Markovkette ist.
2. Zeigen Sie, dass keine der Zeilen der n-Schritte Übergangsmatrix P^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert. Was ist der Grund dafür?
3. Betrachten Sie nun die Markovkette mit Übergangsmatrix $Q := qI_{N+1} + (1-q)P$. Dabei ist P wie oben, $q \in (0,1)$ und I_{N+1} ist die $(N+1)\times(N+1)$ Einheitsmatrix. Zeigen Sie, dass π aus (a) die eindeutige invariante Verteilung der Markovkette ist, und dass jede Zeile von Q^n für $n \to \infty$ gegen π konvergiert.