Markov-Ketten

SS 2018

Vorlesung: apl. Prof. Dr. Stefan Tappe
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2018/vorlesung-markov-ketten-ss-2018

Übung 1

Abgabe: 01.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie Lemma 1.2.2 aus der Vorlesung

(b) Beweisen Sie Lemma 1.2.9 aus der Vorlesung

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Eine faire Münze wird nacheinander geworfen. Die Ergebnisse $Y_0, Y_1, Y_2, \dots$ haben Werte 0 oder 1 mit Wahrscheinlichkeit von jeweils 1/2. Für $n \geq 1$ sei $X_n = Y_n + Y_{n-1}$ die Anzahl der Einsen im $(n-1)$-ten und n-ten Wurf. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Markov-Kette ist oder widerlegen Sie es!

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Sei $(G, \cdot)$ eine abzählbare Gruppe und seien μ, ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(G, \mathcal{P}(G))$. Weiter seinen $X_0, Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in G, so dass $X_0 \sim \nu$ und $Y_i \sim \mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Definiere für $n \in \mathbb{N}$

$$X_n := Y_n \cdot Y_{n-1} \cdot \ldots \cdot Y_1 \cdot X_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum G ist und bestimmen Sie die zugehörige Übergangsmatrix Π. $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ heißt Irrfahrt auf der Gruppe G zur Verteilung μ.

(b) Zeigen Sie, dass Π *doppelt-stochastisch* ist, dass heißt auch die transponierte von Π ist eine stochastische Matrix.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Bonuspunkte)**.** Es sein $E = \{1, 2, 3\}$ und

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \in [0,1]^{E\times E}.$$

Zeigen Sie, dass Π eine stochastische Matrix ist und zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen, also einen Graphen mit Knoten E und beschrifteten Kanten zwischen zwei Knoten genau dann, wenn der entsprechende Eintrag in Π für die Beschriftung positiv ist (anders ausgedrückt ein gewichteter Graph mit Adjazenzmatrix Π). Es sein nun $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette mit Übergangsmatrix Π und es gelte $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 3) = 0.25$ und $P(X_0 = 2) = 0.5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

(a) $P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$

(b) $P(X_2 \in \{1, 3\}, X_3 = 1)$

(c) Für 2 Bonuspunkte, bestimmen Sie mithilfe eines Computers die Wahrscheinlichkeit

$$P^{\{X_0=1\}}(X_{100} = 1)$$