Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 11

Abgabetermin: 14.07.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der (gewöhnlichen) Differentialgleichung $f'(s) = F(s)f(s)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass

$$Z_t := f(t)\Big(z + \int_0^t (f(s))^{-1} G(s)\, dW_s\Big)$$

eine starke Lösung von

$$dZ_t = F(t)Z_t\, dt + G(t)\, dW_t, \qquad Z_0 = z,$$

ist. Prüfen Sie außerdem, ob Satz 3.5 anwendbar ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Dirichletproblem:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, offen und zusammenhängend, $h \in \mathcal{C}(\partial D, \mathbb{R})$ eine auf dem Rand von D stetige Funktion, B eine d-dimensionale Brown'sche Bewegung mit Start in $\bar{D}$ und $\tau := \inf\{t > 0 : B_t \notin D\}$ die Treffzeit des Randes. Zeigen Sie:

a) Eine Funktion $u \in \mathcal{C}^2(D)$ ist genau dann harmonisch, wenn $u(B)$ ein stetiges lokales Martingal ist.

b) $u : x \mapsto \mathbb{E}_x[h(B_\tau)]$ ist die einzige Abbildung, sodass

$$1)\ u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}(\bar{D}), \qquad 2)\ u \text{ ist harmonisch auf } D, \qquad 3)\ u\big|_{\partial D} = h.$$

Hinweis: *Harmonisch* bedeutet, dass der Laplace-Operator verschwindet, also dass $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.
Für die a) ist die Itô-Formel hilfreich. Zeigen Sie in b) nur die Eindeutigkeit.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Prozess X in $\mathbb{R}^d$ genau dann eine Brownsche Bewegung ist, wenn der Prozess

$$f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(X_s)\, ds$$

ein Martingal für alle $f \in \mathcal{C}_K^\infty$ ist.

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei B eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass für die SDE

$$dX_t = \mathbf{1}\{X_t \neq 0\} dB_t, \qquad X_0 = 0,$$

eine starke Lösung existiert, Eindeutigkeit in Verteilung aber nicht gilt.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastische-analysis-ss-2017`