Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Analysis"

Sommersemester 2017, Blatt 5

Abgabetermin: 26.05.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Sei der Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert an eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und besitze X entweder linksstetige oder rechtsstetige Pfade. Zeigen Sie, dass der Prozess X progressiv messbar bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Es seien $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ zwei an dieselbe Filtration adaptierte stochastische càdlàg-Prozesse. Ferner sei Y von endlicher Variation. $\int X_s dY_s$ bezeichne das pfadweise definierte Lebesgue-Stieltjes-Integral. Zeigen Sie

a) Besitzt Y stetig differenzierbare Pfade, so gilt
$$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X_s \dot{Y}_s ds.$$
Dabei bezeichnet der Punkt die Ableitung nach s.

b) Ist $Y_t = \sum_{s\leq t} \Delta Y_s$ für alle $t > 0$, wobei $\Delta Y_s := Y_s - Y_{s-}$, (d.h. Y ist ein reiner Sprungprozess) dann gilt
$$\int_0^t X_s dY_s = \sum_{0<s\leq t} X_s \Delta Y_s.$$

Hinweis: In a) ist die Zerlegung $Y_t = Y_0 + \int_0^t |\dot{Y}_s| ds - \int_0^t (|\dot{Y}_s| - \dot{Y}_s) ds$ hilfreich, für die b) eine analoge.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige stetige lokale Martingale mit $X_0 = Y_0 = 0$ bezüglich einer gemeinsamen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, d.h. die σ-Algebren $\sigma(X_t : t \geq 0)$ und $\sigma(Y_t : t \geq 0)$ sind unabhängig.

a) Zeigen Sie, dass dann $[X, Y] = 0$ gilt.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung zunächst für beschränkte X und Y und verwenden Sie Aufgabe 11 für die Verallgemeinerung.

b) Prüfen Sie, ob die Umkehrung in a) auch gilt.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Seien W eine Brown'sche Bewegung mit $W_0 = 0$ und $T := \inf\{t > 0 : W_t = 1 \text{ oder } W_t = -2\}$.

a) Zeigen Sie, dass T eine Stoppzeit bezüglich der kanonischen Filtration von W ist.

b) Wir definieren $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$ durch $X_t := W_{t\wedge T}$ und $Y_t = -X_t$. Zeigen Sie, dass $[X]_t = [Y]_t = t \wedge T$ ist und dass X und Y nicht dieselben Verteilungen haben.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastische-analysis-ss-2017`