Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 3

Abgabetermin: 12.05.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 9 (4+1 Punkte)

Prüfen Sie (mit Beweis), ob die folgenden Lebesgue-Stieltjes-Integrale existieren und berechnen Sie gegebenenfalls deren Wert.

a) $\displaystyle\int_0^t \exp(s)\ d(\lfloor s\rfloor + s^2)$, b) $\displaystyle\int_0^1 s\ d\Big(s\cdot\sin\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big)$, c) $\displaystyle\int_0^1 s^{-\frac{1}{2}}\ d\sqrt{s}$,

d) $\displaystyle\int_{-1}^t s\ ds^2$, e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{s^2}\ ds^2$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Sei $I \subseteq [0,\infty)$, sei $\mathcal{F}$ eine Filtration und sei $X = (X_t)_{t\in I}$ ein daran adaptierter, integrierbarer stochastischer Prozess. Falls I nicht diskret ist, seien $\mathcal{F}$ und X rechtsstetig.

a) Zeigen Sie, dass X genau dann ein Martingal ist, wenn $\mathbb{E}[X_\sigma] = \mathbb{E}[X_\tau]$ für alle endlichen $\mathcal{F}$-Stoppzeiten σ, τ gilt, die nur höchstens zwei Werte annehmen.

b) Sei X ein Martingal bezüglich $\mathcal{F}$, sei τ eine $\mathcal{F}$-Stoppzeit, die nur abzählbar viele Werte annimmt und sei η eine beschränkte, $\mathcal{F}_\tau$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass der Prozess $Y = (Y_t)_{t\in I}$ mit $Y_t = \eta(X_t - X_{t\wedge\tau})$ ein Martingal ist.

Hinweis: Sei $\mathcal{F}$ eine Filtration und sei τ eine zufällige Zeit (d.h. Zufallsvariable) mit Werten in I bzw. in $I \cup \{\infty\}$, falls I nicht beschränkt ist. Die zufällige Zeit τ heißt $\mathcal{F}$-Stoppzeit, falls $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei $X = (X_t)_{t\ge 0}$ ein lokales Martingal.

a) Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist, falls $\mathbb{E}[\sup |X_t|] < \infty$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass man eine lokalisierende Folge (τ_n) wählen kann, sodass X^{τ_n} für alle n gleichgradig integrierbar ist, falls X_0 zusätzlich integrierbar ist.

c) Zeigen Sie, dass man eine lokalisierende Folge (σ_n) wählen kann, sodass X^{σ_n} für alle n beschränkt ist, falls X zusätzlich noch stetige Pfade besitzt und X_0 beschränkt ist.

Aufgabe 12 (4+2 Punkte)

Es sei $\mathcal{N}^2$ die Klasse der quadratintegrierbaren Martingale in stetiger Zeit, die die üblichen Bedinungen erfüllen und sei $\mathcal{N}_c^2 \subset \mathcal{N}^2$ die Klasse solcher Martingale, die stetige Pfade besitzen. Zeigen Sie, dass

a) durch die Vorschrift $\|M\|_{\mathcal{N}^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(1 \wedge \|M_n\|_{\mathcal{L}^2})$ eine Metrik auf (den entsprechenden Äquivalenzklassen von) $\mathcal{N}^2$ definiert wird,

b) $(\mathcal{N}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{N}^2})$ ein vollständiger metrischer Raum ist und

c) $\mathcal{N}_c^2$ eine abgeschlossene Menge in $(\mathcal{N}^2, \|\cdot\|_{\mathcal{N}^2})$ ist.

d) Prüfen Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), ob die in a) definierte Metrik auf dem Raum der L^2-beschränkten stetigen Martingale $\mathcal{M}^2$ äquivalent zu der Metrik ist, die von der Norm $\|\cdot\|$ aus der Vorlesung erzeugt wird. Falls die Metriken nicht äquivalent sind, prüfen Sie, ob eine der erzeugten Topologien feiner als die andere ist.

Hinweis: Zeigen Sie bei b), dass eine entsprechende Cauchy-Folge zu jedem festen Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ konvergiert und betrachten Sie diese Grenzwerte. Borel-Cantelli hilft bei c). Zwei Metriken heißen *äquivalent*, falls sie die gleiche Topologie erzeugen.