Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Analysis"

Sommersemester 2017, Blatt 2

Abgabetermin: 05.05.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei X ein rechtsstetiges, uniform integrierbares Sub-Martingal mit rechtsstetiger Filtration $\mathcal{F}$ und $\sigma \leq \tau$ fast sicher endliche Stoppzeiten.

a) Zeigen Sie, dass X_τ integrierbar ist und $X_\sigma \leq \mathbb{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma]$ gilt.

b) Folgern Sie, dass der gestoppte Prozess X^τ ebenfalls ein Sub-Martingal ist.

Hinweis: Jede Stoppzeit τ definiert die σ-Algebra

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \forall t \geq 0\},$$

wobei $\mathcal{A}$ die σ-Algebra des Wahrscheinlichkeitsraumes ist.
Verwenden Sie die Folgen von Stoppzeiten $\sigma_n := 2^{-n}[2^n\sigma + 1]$ und $\tau_n := 2^{-n}[2^n\tau + 1]$, das Optional Sampling Theorem im zeitdiskreten Fall und Martingalkonvergenzsätze um a) zu zeigen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

a) Sei X ein Prozess mit càdlàg-Pfaden und natürlicher Filtration $\mathcal{F}$. Sei A das Ereignis, dass X stetig auf $[0, t_0)$ ist. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{F}_{t_0}$ gilt.

b) Sei X ein Prozess mit linksstetigen Pfaden mit rechtsseitigem Grenzwert. Sei A das Ereignis, dass X stetig auf $[0, t_0]$ ist. Sei X adaptiert an eine rechtsstetige Filtration $\mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass $A \in \mathcal{F}_{t_0}$ gilt.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sei X ein lokales Martingal, adaptiert an eine Filtration $\mathcal{F}$ und ξ eine $\mathcal{F}_0$-messbare, reellwertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass der Prozess Y mit $Y_t = \xi X_t$ ein lokales Martingal ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein nach unten beschränktes lokales Martingal mit integrierbarem Startwert ein Supermartingal ist. Folgern Sie daraus, dass ein beschränktes lokales Martingal ein Martingal ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die entsprechende Aussage aus dem Lemma von Fatou auch für bedingte Erwartungswerte gilt.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastische-analysis-ss-2017`