Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 7

Abgabetermin: 16.06.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 25 (4+2 Punkte)

Für $h \in (0,1)$ sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein Gauss'scher Prozess mit $\mathbb{E}[X_t] = 0$ für alle t und Kovarianzstruktur gegeben durch

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \tfrac{1}{2}(t^{2h} + s^{2h} - (t-s)^{2h})$$

für alle $s \leq t$.

a) Zeigen Sie, dass $X_t - X_s \overset{d}{=} (t-s)^h X_1$ für alle $t \geq s$.

b) Prüfen Sie, für welche h der Prozess X ein Markov-Prozess ist.

c) Prüfen Sie, für welche $h \leq \frac{1}{2}$ der Prozess X ein Semimartingal ist.

Hinweis: Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in I}$ (mit Werten in $\Re$) heißt Gauss'sch, wenn $c_1 X_{t_1} + \ldots + c_n X_{t_n}$ für jede Wahl von $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und $t_1, \ldots, t_n \in i$ normalverteilt ist.
Ein Gauss'scher Prozess X ist genau dann ein Markov-Prozess, wenn

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_u) \cdot \mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t) \cdot \mathrm{Cov}(X_t, X_u)$$

für alle $s \leq t \leq u$.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

a) Sei B eine Brownsche Brücke. Zeigen Sie, dass B ein Semimartingal bezüglich der von B erzeugten Filtration ist.

b) Zeigen Sie, dass die kanonische Zerlegung eines stetigen Semimartingals von der Filtration abhängen kann.

Hinweis: Zeigen Sie für a), dass $M = (M_t)_{t\in[0,1)}$ mit $M_t = (1-t)^{-1} B_t$ ein Martingal ist und verwenden Sie partielle Integration. Verwenden Sie Aufgabenteil a) um b) zu zeigen.

Aufgabe 27 (4+2 Punkte)

Sei B eine dreidimensionale Brownsche Bewegung, die in $(0,0,0)$ gestartet wird und sei weiter $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\|x\|}$. Zeigen Sie, dass der Prozess $M = (M_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch $M_t = f(B_{t+1})$, zwar ein lokales Martingal, jedoch kein Martingal ist.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass die dreidimensionale Brownsche Bewegung nicht rekurrent ist, d.h. bei beliebigem Startpunkt x kehrt die Brownsche Bewegung fast sicher nicht in jede beliebig kleine Kugel um x zurück. Verwenden Sie die Itô-Formel um zu zeigen, dass M ein lokales Martingal ist. Führen Sie die Annahme, dass M ein Martingal ist, zum Widerspruch, indem Sie $\mathbb{E}[M_t^2]$ betrachten.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 1.31 aus der Vorlesung:
Für ein beliebiges stetiges Semimartingal $X = M + A$ und einen beliebigen Prozess $V \in L(X)$ existieren $V_n \in \mathcal{E}, n \in \mathbb{N}$, so dass fast sicher

$$((V_n - V)^2 \cdot [M])_t \to 0 \qquad \text{und} \qquad \sup_{0 \le s \le t} |((V_n - V) \cdot A)_s| \to 0$$

für alle $t > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst Konvergenz in Wahrscheinlichkeit und unterteilen die Konstruktion von V_n in 3 Schritte. Zunächst approximieren Sie V durch beschränkte und progressive Prozesse V', dann approximieren Sie jedes V' durch stetige und adaptiere Prozesse V'' und abschließend approximieren Sie jedes V'' durch einfache Prozesse V'''.