Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Analysis“

Sommersemester 2017, Blatt 12

Abgabetermin: 21.07.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Es sei $B = (B^1, \ldots, B^n)$ eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung mit Start nicht in 0. Wir betrachten den sogenannten *n-dimensionalen Bessel-Prozess* $X = (X_t)$ mit $X_t = \|B_t\|_2$.

a) Bestimmen Sie eine schwache Lösung für $dX_t = \frac{n-1}{2X_t}dt + dW_t$ mit 1-dimensionaler Brown'scher Bewegung W.

b) Zeigen Sie, dass $Y := 1/X$ genau dann ein stetiges lokales Martingal ist, wenn $n = 3$, und in diesem Fall eine natürliche Skala besitzt.

Hinweis: Eine Diffusion hat eine natürliche Skala, wenn für ihre Skalenfunktion S mit

$$S(x) = \int_1^x \exp\left(-2\int_1^y \frac{b(z)}{\sigma^2(z)}dz\right) dy$$

gilt, dass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $S(x) = x + c$ für alle x.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Sei W eine BB und der Prozess X mit $X_0 = 1$ eine Lösung der SDE

$$dX_t = bX_t dt + \sigma X_t dW_t$$

unter einem Maß $\mathbb{P}$, wobei $b \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Verwenden Sie den Satz von Girsanov um einen Maßwechsel zu einem Maß $\mathbb{Q}$ durchzuführen, unter dem der Prozess X ein lokales Martingal ist.

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Aussagen zur Drift-Transformation:

a) Seien σ, b, c progressive Funktionen geeigneter Dimension, wobei c beschränkt sei. Dann gilt schwache Existenz gleichzeitig für die SDEs (σ, b) und $(\sigma, b + \sigma c)$.

b) Falls darüberhinaus $c = \sigma' h$ für eine progressive Funktion h gilt, dann gilt sogar Eindeutigkeit in Verteilung für beide SDEs gleichzeitig.

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Zeigen Sie die diskrete Version der Tanaka-Formel:

Es sei $\text{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(x)$. Wir betrachten die einfache Irrfahrt $X = (X_n)_{n\geq 0}$ mit $X_0 = 0$ und $X_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \geq 1$, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1/2$. Für $x \in \mathbb{Z}$ sei $L_n(x) = \#\{0 \leq k < n, X_k = x\}$ die *Lokalzeit*, d.h. die Anzahl der "Besuche", der Irrfahrt in x bis zur Zeit n. Zeigen Sie mit Hilfe der diskreten Ito-Formel aus Aufgabe 4

$$|X_n - x| = |x| + \sum_{k=1}^{n} \text{sign}(X_{k-1} - x)\Delta X_k + L_n(x).$$

Folgern Sie, dass sich die Anzahl der Besuche in 0 bis auf einen konstanten Faktor wie $\sqrt{n}$ verhält. Zeigen Sie dazu für $L_n := L_n(0)$

$$\mathbb{E}[L_n] \sim \sqrt{2n/\pi}, \quad n \to \infty.$$

Hier schreiben wir wie üblich $a_n \sim b_n$ für $n \to \infty$, falls $a_n/b_n \to 1$ für $n \to \infty$ gilt.

Hinweis: Verwenden sie im zweiten Teil, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist, wenn eine Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ exisitiert so, dass $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[f(|X_n|)] < \infty$.

Aufgabe 49 (0+4 Punkte)

a) Sei M ein stetiges lokales Martingal mit $M_0 = 0$ und sei L seine Lokalzeit in 0. Beweisen Sie, dass
$$\inf\{t : L_t > 0\} = \inf\{t : [M]_t > 0\}$$
fast sicher gilt. Zeigen Sie, dass inbesondere $M \equiv 0$ genau dann, wenn $L \equiv 0$.

b) Sei $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und W eine BB. Beweisen Sie, dass dann fast sicher gilt:
$$\int_{\mathbb{R}} h(a)\Big(\int_0^t \text{sgn}(W_s - a)dW_s\Big)da = \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} h(a)\text{sgn}(W_s - a)da\Big)dW_s. \tag{1}$$

Hinweis: Schreiben das äußere Integral auf der linken Seite von (1) zunächst als Grenzwert von Riemann-Summen. Verwenden Sie dabei, dass der Integrand wegen der Tanaka-Formel und der Stetigkeit der Lokalzeit eine stetige Modifikation besitzt.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-stochastische-analysis-ss-2017`