Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Analysis"

Sommersemester 2017, Blatt 8

Abgabetermin: 23.06.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.14., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 29 (4+2 Punkte)

Zeigen Sie Satz 1.33 (Kazamaki) aus der Vorlesung:
Sei τ ein endlicher zufälliger Zeitwechsel mit induzierter Filtration $\mathcal{G} = (F_{\tau_s})_{s\geq 0}$, und sei $X = M + A$ ein τ-stetiges $\mathcal{F}$-Semimartingal.

a) Dann ist $X \circ \tau = (X_{\tau_t})_{t\geq 0}$ ein stetiges $\mathcal{G}$-Semimartingal mit kanonischer Zerlegung $M \circ \tau + A \circ \tau$.

b) Es gilt $[X \circ \tau] = [X] \circ \tau$ fast sicher.

c) Außerdem gilt
$$V \in L(X) \Rightarrow V \circ \tau \in \hat{L}(X \circ \tau)$$
und in diesem Falle ist
$$(V \circ \tau) \cdot (X \circ \tau) = (V \cdot X) \circ \tau$$
fast sicher.

Hinweis: Verwenden Sie in a) und in c) ohne Beweis, dass für einen progressiven Prozess $X = (X_t)_{t\geq 0}$ und eine endliche Stoppzeit τ gilt, dass X_τ messbar bezüglich $\mathcal{F}_\tau$ ist. Gehen Sie analog zum Beweis von Lemma 1.4 vor, um die kanonische Zerlegung zu zeigen. Zeigen Sie c) zunächst für $V = \mathbf{1}_{[0,t]}$ und erweitern Sie das Resultat anschließend.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Es sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte Brown'sche Bewegung und $B = (B_t)_{0\leq t<1}$ definiert durch
$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\, dW_s.$$

Zeigen Sie, dass B eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung
$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t}\, dt + dW_t,$$
ist und dass $\lim_{t\to 1} \mathbf{E}[B_t^2] = 0$ gilt.

Hinweis: Die Aufgabe wurde ausgetauscht. Die ursprüngliche Aufgabe wird stattdessen auf dem nächsten Blatt behandelt.
Der Prozess $B = (B_t)_{0\leq t\leq 1}$ (fortgesetzt mit $B_1 = 0$) heißt *Brown'sche Brücke*.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

a) Es sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ein stetiges lokales Martingal mit $[X]_t \uparrow \infty$ fast sicher für $t \to \infty$ (und mit beschränktem Startwert). Zeigen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_t}{[X]_t} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

b) Sei W eine Brown'sche Bewegung und H progressiv messbar, sodass $\int_0^\infty H_s^2 ds = \infty$ fast sicher. Finden Sie eine (zufällige) Funktion τ, sodass $(H \cdot W)_t \overset{d}{=} W_{\tau(t)}$. Ist es möglich τ so zu wählen, dass die Gleichheit fast sicher gilt?

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Es sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter stetiger Prozess (mit integrierbarem Startwert) und $A = (A_t)_{t\geq 0}$ ein wachsender Prozess von endlicher Variation mit $A_0 = 0$. Zeigen Sie:

a) Ist für jedes λ der Prozess $Z^{(\lambda)} = (Z_t^{(\lambda)})_{t\geq 0}$ mit $Z_t^{(\lambda)} = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} A_t\right)$ ein lokales Martingal, dann ist M ein lokales Martingal und es gilt $[M] = A$.

b) M ist genau dann ein lokales Martingal mit $[M] = A$, wenn für jedes $f \in C_b^2$ (zweimal stetig differenzierbare, beschränkte Funktionen)

$$\left(f(M_t) - f(M_0) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)\, dA_s\right)_{t\geq 0}$$

ein lokales Martingal ist.

Hinweis: Betrachten Sie in a) die ersten zwei Ableitungen von geeigneten Erwartungswerten des Prozesses $Z^{(\lambda)}$ nach λ an der Stelle $\lambda = 0$. In b) nutzen Sie für eine Richtung geeignet trunkierte Funktionen der Form $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$.