Übungen zur Vorlesung "Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 7

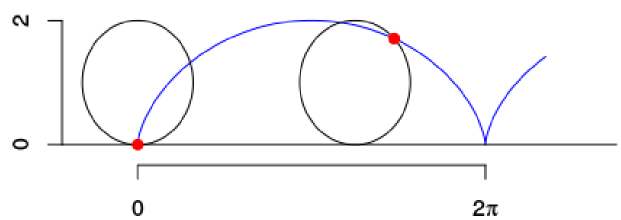
Abgabetermin: Freitag, 16.06.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie den Umfang der Ellipse aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 3.
HINWEIS: Nutzen Sie aus, dass die Ellipse das affine Bild des Einheitskreises ist, um eine Parametrisierung der Ellipsenlinie zu finden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die *Zykloide* beschreibt die Bahn eines Punktes auf dem Rand des Einheitskreises in der Ebene, der auf der x-Achse in positive x-Richtung abgerollt wird (zu Beginn befindet sich dieser Punkt im Koordinatenursprung, vgl. die Skizze unten). Für genau eine Umdrehung des Einheitskreises kann die Bahnkurve beschrieben werden durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))^\top$. Berechnen Sie die zugehörige Bogenlänge!



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $\|\gamma(t) - x\|$ nur dann an inneren Stellen $t \in (0, 1)$ extremal sein kann, wenn der Verbindungsvektor $\gamma(t) - x$ orthogonal zum Tangentenvektor $\gamma'(t)$ ist (dabei bezeichne $\|x\|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ist die *Rotation von f* definiert als

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$ für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

b) Für $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ ist der *Laplace-Operator* Δf durch $\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$ definiert. Zeigen Sie für $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, dass

$$\Delta(fg) = f\,\Delta g + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle + g\,\Delta f.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-mathe-II-ing-ws-2017`