Übungen zur Vorlesung
"Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 19.05.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgende Formel für die Determinante einer block-oberen Dreiecksmatrix:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & \star \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \det(A)\cdot\det(B),$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen sind, $\star \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine beliebige $m \times n$-Matrix und 0 die $n \times m$-Nullmatrix mit ausschließlich Nullen als Einträgen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{P}_n([0,1])$ der Vektorraum der Polynome $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens n. Weiter seien $x_1 \dots, x_m \in [0,1]$ und $f : V \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(p) = (p(x_1), ..., p(x_m))^\top$. Zeigen Sie:

a) f ist eine lineare Abbildung.

b) Sei $\mathcal{A} = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_m\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie $f_{\mathcal{BA}}$ und $(f(p))_{\mathcal{B}}$.

c) Sei $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{A}'$ von V.

d) Sei $m = n$. Unter welchen Bedingungen an $x_1, \dots, x_n$ ist f invertierbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ werden die linearen Abbildungen $\pi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ und $\sigma_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzgl. der Standardbasen $\{e_1, \dots, e_m\}$ des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ eindeutig festgelegt durch die Forderungen

$$\pi_i(1) := e_i \in \mathbb{R}^m, \qquad \sigma_j(\bar{e}_\ell) := \delta_{j\ell} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = \ell, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \ell \in \{1, \dots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass für eine $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die zugehörige lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Beziehung

$$f_A = \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} a_{ij}\cdot(\pi_i \circ \sigma_j)$$

erfüllt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei bezüglich der Standardbasen $\{e_1, e_2, e_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seien $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ und $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ weitere Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ und $F = f_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$ die darstellende Matrix der Abbildung f bzgl. der Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ (im Sinne von Satz 6.2 auf S. 110 des Vorlesungsskripts). Geben sie jeweils die darstellende Matrix F an bzgl. der Basen

a) $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$,

b) $\{e_1, e_2, e_3\}$ und $\{b_1, b_2\}$,

c) $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{b_1, b_2\}$,

wobei

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weisen Sie dabei zunächst nach, dass $\{a_1, a_2, a_3\}$ und $\{b_1, b_2\}$ tatsächlich Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ sind!