Übungen zur Vorlesung "Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens"

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 5.5.2017, bis 14:00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051.
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die lineare Abbildung $f_t \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch ihre beschreibende Matrix A_t (bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$), wobei

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige lineare Abbildung f_t bijektiv?

b) Bestimmen Sie im Fall $t = 1$ die Urbildmengen

$$(f_1)^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{und} \qquad (f_1)^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ermitteln Sie ferner $\dim \ker f_1$ $(= \dim \ker A_1)$ sowie $\dim \operatorname{Bild} f_1$ $(= \dim \operatorname{Bild} A_1)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für eine Permutation π der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ definiert man die *Signatur* $\operatorname{sign}(\pi)$ von π durch

$$\operatorname{sign}(\pi) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{sign}(\pi) \in \{-1, 1\}$ für alle Permutationen π.

b) Zeigen Sie, dass für die Hintereinanderausführung $\pi \circ \sigma$ zweier Permutationen π und σ gilt $\operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\pi) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$.

c) Zeigen Sie $\operatorname{sign}(\pi) = \varepsilon(\pi)$ mit $\varepsilon(\pi)$ wie auf S. 100/101 des Vorlesungsskripts definiert.

(bitte wenden)

d) Zeigen Sie mit Hilfe von a)–c) die auf S. 99 des Vorlesungsskripts enthaltene Aussage: „Die Anzahl der Vertauschungen $\tau_{k\ell}$, durch deren Hintereinanderausführung man eine gegebene Permutation π erhalten kann, ist nicht eindeutig bestimmt, *aber sie ist entweder stets gerade oder stets ungerade.*“

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für $n \geq 2$ an, so dass $\det(A + B) \neq \det A + \det B$.

b) Seien $m > n$ und $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Beweisen Sie, dass dann stets $\det(A \cdot B^\top) = 0$ gilt.