Discrete Time Finance SS 2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

Übung 9

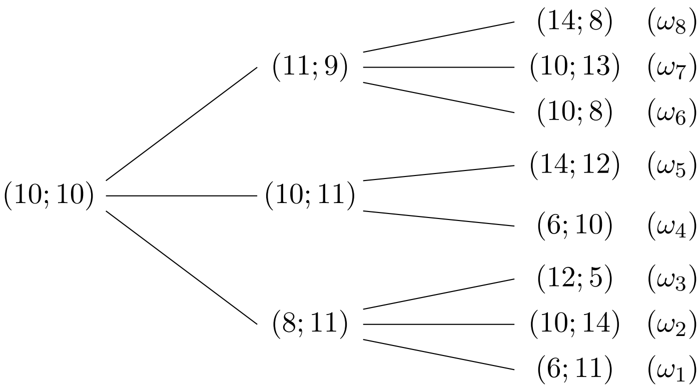
Abgabe: 04.07.2017 zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgende Aussage:
Jedes Supermartingal X kann zerlegt werden in ein Martingal M und einen fallenden, vorhersehbaren Prozess A, sodass

$$X_t \; = \; M_t + A_t, \qquad t \in \{0, \dots, T\}$$

gilt. Für $A_0 = 0$ ist die Zerlegung eindeutig.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte)**.** Wir betrachten einen zweiperiodigen Markt mit einer risikolosen Anlage mit $r = 0$ und zwei Aktien S_t^1 und S_t^2. Die Kursentwicklung der Aktien in Tupelschreibweise $(S_t^1; S_t^2)$ sei



(a) Ist der Markt arbitragefrei? Bestimmen Sie ggf. die Menge der äquivalenten Martingalmaße oder geben Sie eine Arbitragemöglichkeit an.

(b) Was kostet ein Call mit Strike $K = 10$ auf die zweite Aktie S_T^2?

(c) Bestimmen Sie eine selbstfinanzierende Handelsstrategie zur Replikation einer Put-Option auf S_T^1 mit Strike $K = 11$ und damit den Preis der Option.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte)**.** Seien $(Y_k)_{k=1,\dots,T}$ i.i.d. Zufallsvariablen in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, und nehmen Sie an dass diese Y_k $P-$f.s. nicht deterministisch sind. Es gelte $\mathbb{E}[Y_k] = 0$. Ferner sei für X_0 deterministisch

$$X_t := X_0 + \sum_{k=1}^{t} Y_k, \qquad t = 0, \dots, T.$$

Dann ist X bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ ein Martingal. Wir vergrößern nun die Filtration durch "insider" Informationen, nämlich den Wert von X zum Zeitpunkt T. Konkret betrachten wir die Filtration

$$\tilde{\mathcal{F}}_n := \sigma(\mathcal{F}_n \cup \sigma(X_T)).$$

Bitte wenden

(a) Zeigen Sie, dass X kein P-Martingal mehr bzgl. der Filtration $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=1,\dots,T}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Prozess

$$\tilde{X}_t := X_t - \sum_{k=0}^{t-1} \frac{1}{T-k}(X_T - X_k)$$

ein P-Martingal bzgl $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t=1,\dots,T}$ ist.

(c) Die Zusatzinformation X_T impliziert die Existenz einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie mit positivem erwarteten Profit. Konstruieren Sie eine solche Strategie H^* die den erwarteten Profit

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{T} H_t(X_t - X_{t-1})\right]$$

innerhalb der Menge aller $\tilde{\mathcal{F}}$-vorhersehbaren Strategien H mit $|H_t| \leq 1$ P-f.s. maximiert.