UNI FREIBURG

Discrete Time Finance — SS 2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

Übung 8

Abgabe: 27.06.2017 zu Beginn der Übung.

Aufgabe 1 (4 Punkte). (a) Wiederholen Sie die Aufgabe 2a des vorigen Übungsblattes wobei Sie anstelle einer Call-Option eine asiatische Call-Option mit Auszahlung H:

$$H = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} (S_t - K) \right)^+$$

implementieren und bewerten sollen. Hierbei ist S_t der Preis der undiskontierten Aktie zum Zeitpunkt t.

(b) Erweitern Sie die Funktion in (a) um eine asiatische Put-Option mit

$$H = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} (K - S_t) \right)^+ .$$

Erwarten Sie hier eine Put-Call-Parität?

(c) Gegeben sei das Blasck-Scholes Modell mit $S = S_0 = 1$, $r = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0.2$, $\mu = 0$. Bestimmen Sie die Formel für den Arbitrage freien Preis einer europäischen Call-Option $K = 1$.

(d) Nutzen Sie das CRR Modell um den Preis einer europäischen Call-Option im Black-Scholes Modell zu approximieren. Finden Sie dazu geeignete Folgen von Modellparametern und unterteilen Sie die Zeit bis zur Maturität in $N = 1, 2, ..., 30$ Schritten. Plotten Sie die approximierten Preise als Funktion von N und zeichnen Sie den korekten Black-Scholes Preis ein. Geben Sie auch die von Ihnen genutzten Parameterfolgen an. Als Parameter nutzen Sie die obigen.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter W-Raum und $M = (M_t)_{t=0,\dots,T}$ ein Martingal bzgl $\mathbb{F}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $M_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), t = 0, \dots, T$ gilt

$$\mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2\right] = \mathbb{E}\left[M_t^2 - M_s^2\right], \quad 0 \le s \le t \le T.$$

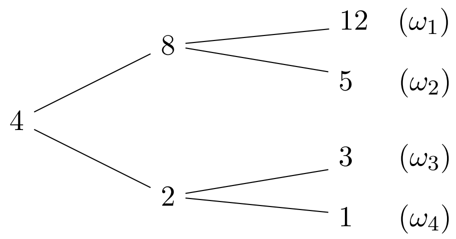
(b) Sei $\theta = (\theta_t)_{t=1,\dots,T}$ beschränkt und vorhersehbar. Zeigen Sie, dass $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ mit $X_0 = 0$ und

$$X_t = \sum_{s=1}^{t} \theta_s (M_s - M_{s-1}), \quad 1 \le t \le T,$$

ein Martingal ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie einen Finanzmarkt mit einer Aktie S und einer risikolosen Anleihe mit $r = 0,25$ und $T = 2$. Der Kurs der Aktie habe die Dynamik

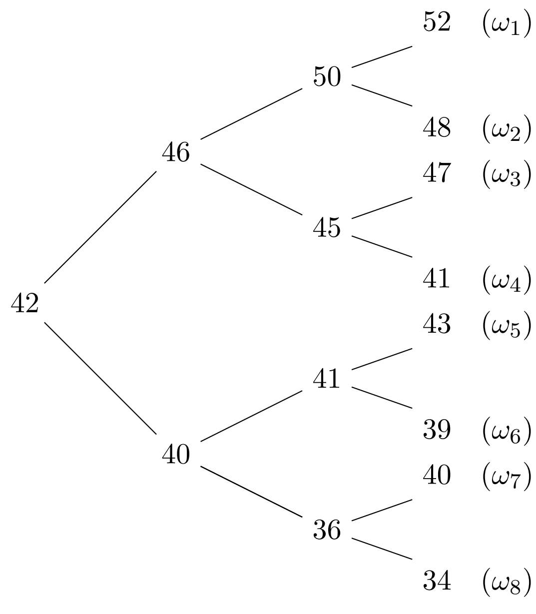


(a) Bestimmen Sie den Wert eines Lookback-Puts, dessen Auszahlung gegeben ist durch

$$H = \max_{0 \le t \le T} S_t - S_T$$

(b) Replizieren Sie die Option aus (a) und überprüfen Sie ob die replizierende Handelsstrategie auch den selben Wert hat wie der Preis aus (a) berechnet durch das Martingalmaß.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten einen Finanzmarkt mit $T = 3$ Perioden. Auf diesem sei eine risikolose Anlage mit Zins $r = 0$ verfügbar sowie eine Aktie S mit folgender Dynamik



Replizieren sie den bedingten Anspruch mit Auszahlung zum Zeitpunkt $T = 3$ gegeben durch

$$H = \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} (S_t - S_T) \right)^+ .$$

Bestimmen Sie auch den Preis dieser Option.