Discrete Time Finance **SS 2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

Übung 6

Abgabe: 13.06.2017 zu Beginn der Übung.

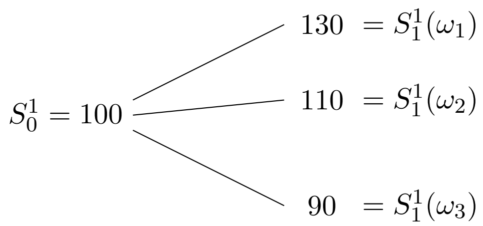
Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Leiten Sie die Put-Call-Parität für europäische Optionen her, d.h. zeigen Sie

$$C - P = S - \frac{1}{1+r}K, \tag{1}$$

wobei C der Preis einer Call-Option ist, P derjenige einer Put-Option, S der heutige Preis der Zugrunde liegenden Aktie, r der Zinssatz für ein Jahr und K der Strike. Es reicht diese Parität für ein Einperiodenmodell mit $T =$ ein Jahr zu zeigen.

Hinweis: Betrachten Sie zwei verschiedene Handelsstrategien. Nutzen Sie aus das wenn zwei Portfolios zum Zeitpunkt T die exakt gleiche Auszahlung haben, sie zum Zeitpunkt $t = 0$ den gleichen Preis haben müssen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie ein einperiodiges Modell mit Zinssatz $r > 0$, i.e. $S_0^0 = 1$ und $S_1^0 = 1 + r$. In diesem gibt es eine Aktie mit Wertentwicklung:



Gehen Sie von $P(\omega_i) > 0 \forall i$ aus. Bestimmen Sie alle EMMe. Gegeben Sei eine Option C mit Auszahlung $C_1(\omega_1) = 30$, $C_1(\omega_2) = 7$ und $C_1(\omega_3) = 0$. Bestimmen Sie die Menge der Preise C_0 unter denen der Um C erweiterte Markt arbitragefrei bleibt.

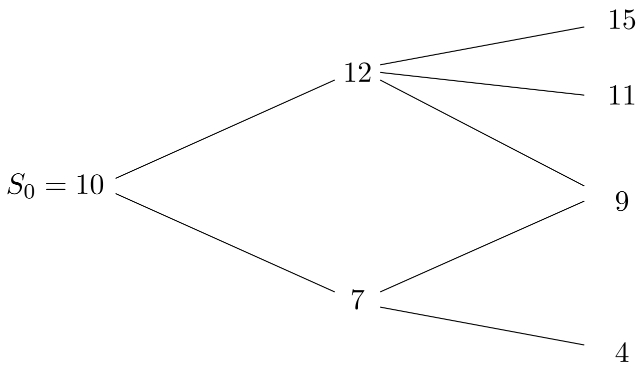
Hinweis: Unterscheiden Sie die relevanten Fälle für r.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)**.** Sei $X_1 \sim \text{Uni}(0,1)$, $X_2 \sim \text{Uni}(0, X_1)$, und allgemein $X_n \sim \text{Uni}(0, X_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Folge der Erwattungswerte von X_n.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $S = \sum_{i=1}^{\infty} X_i$ fast sicher konvergent ist, das heißt die Zufallsgröße S existiert und fast sicher endlich ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Wir betrachten ein zwei-periodisches Modell mit jährlichem Zins $r = 0$ und einer Aktie S. Die möglichen Preisentwicklungen der Aktie sind in dem Baum unten dargestellt



Bezeichne S_t den Preis der Aktie zum Zeitpunkt t. Wir haben $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß nehmen wir $\mathbb{P}(\omega_i) > 0 \; \forall \; i$ an.

(a) Bestimmen Sie die Menge der EMMe.

(b) Sei C eine Call-Option mit terminaler Auszahlung $C_2 = \max(0, S_2 - 8)$. Für welche Preise C_0 ist der erweiterte Markt arbitragefrei?