Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2017/vorlesung-discrete-time-finance-ss-2017

# Übung 5

**Abgabe: 30.05.2017 zu Beginn der Übung.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei E ein normierter Raum und $V \subset E$ eine abgeschlossene konvexe Teilmenge. Zeigen Sie: Wenn $(x_n)_{n\geq 0} \subset V$ eine schwach konvergente Folge ist mit $x_n \xrightarrow{w} x$ (d.h. $x_n$ konvergiert schwach gegen ein $x$), $x \in V$ folgt.

*Hinweis: Normierte Räume sind lokal konvex, zeigen!*

**Aufgabe 2** (0,5+0,5+0,5+2,5 Punkte)**.** Seien $(J_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. verteilten Zufallsvariablen und $N$ ein zu diesen unabhängiger Poissonprozess mit Intensität $\lambda$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} J_i,$$

für die Fälle in denen die $J_i$

(a) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

(b) $\mathrm{Poi}(\lambda)$,

(c) $\mathrm{Exp}(\lambda)$

verteilt sind.

(d) Bestimmen Sie auch die charakteristischen Funktionen.

**Aufgabe 3** (3+1 Punkte)**.** Wir betrachten nun die Prozess $X$ aus Aufgabe 2. Unter welchen Voraussetzungen an den $J_i$ hat $X$ unabhängige und stationäre Zuwächse? Für den Prozess

$$Y_t = X_t - bt,$$

welche Bedingung muss $b$ erfüllen damit $Y$ ein Martingal ist?

**Bitte wenden**

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Gegeben sei ein einperiodiges Finanzmarktmodell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für alle $i$. In diesem Markt gebe es eine risikoloses Bankkonto mit $r = 0.1$, i.e. $S_0^0 = 1, S_1^0 = 1.1$. Bestimmen Sie die Menge der EMM.

$$
\begin{array}{ccl}
 & \nearrow & 130 \quad = S_1^1(\omega_1) \\
S_0^1 = 100 & & \\
 & \searrow & 90 \quad = S_1^1(\omega_2)
\end{array}
$$

Wir erweitern den Markt um ein weiteres Wertpapier $C$. Dieses ist ein Derivat mit $C_1(\omega_1) = 30$ und $C_1(\omega_2) = 0$. Wie muss der anfängliche Preis $C_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ lauten damit das Modell arbitragefrei bleibt?