Straffheitskriterien

Lemma 3.31. *Sei $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Prozessen, sodass $\forall\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ \varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |Z_t^n| > \varepsilon\right] = 0,$$

und falls eine weitere Folge $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist (in Verteilung gegen Y konvergiert), so ist $(Y^n + Z^n)$ ebenfalls straff (konvergiert in Verteilung gegen Y).

Lemma 3.32. *Sei $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastischen Prozessen, die für alle $n, q \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung*

$$X^n = U^{n,q} + V^{n,q} + W^{n,q}$$

mit folgenden Eigenschaften hat:

1. *Die Folge $(U^{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff*
2. *Die Folge $(V^{n,q})_{n\in\mathbb{N}}$ ist straff und es existiert eine reelle Folge $(a_q)_{q\in\mathbb{N}}$, sodass $\lim\limits_{q\to\infty} a_q = 0$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |\Delta V_t^{n,q}| > a_q\right] = 0 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

3. *Für alle $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ gilt*

$$\lim_{q\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}^n\left[\sup_{t\in[0,N]} |W_t^{n,q}| > \varepsilon\right] = 0.$$

Dann ist $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ straff.

Wachsende Prozesse

Definition 3.34.

1. Ein reellwertiger stochastischen Prozess X heißt wachsend, falls seine Pfade nicht negativ, nicht fallend, rechtsseitig stetig und 0 in der 0 sind. (Die Menge mit Funktionen dieser Eigenschaft wird auch mit $\mathscr{V}^+$ bezeichnet. Es gilt $\mathscr{V}^+ \subset \mathbb{D}(\mathbb{R})$.)
2. Seien X und Y zwei wachsende stochastische Prozesse, die auf derselben stochastischen Basis definiert sind. X majorisiert Y stark ($Y < X$), falls $X - Y$ wieder ein wachsender Prozess ist.

Proposition 3.35. *Seien $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von wachsenden stochastischen Prozessen. Weiter gelte $Y^n < X^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist X^n straff (C-straff) so auch Y^n.*

Theorem 3.37. *Seien X^n, X wachsende Prozesse mit*

a) *X ist stetig*

oder

b) *X^n und X sind Punktprozesse (d.h. Jeder Pfad hat die Form $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[t_n,\infty)}$ für eine Folge $t_n \nearrow\!\!\nearrow \infty, t_1 > 0$)*

Dann gilt

$$X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X \text{ für } D = \mathbb{R}_+ \setminus J(X) \qquad \Longrightarrow \qquad X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$$