Konvergenz gegen einen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen

Einleitung/Wiederholung

1. Semimartingal-Charakteristiken: (vgl. Jacod/Shiryaev, II.§2a) Für ein Semimartingal X und eine Abschneidefunktion $h \in \mathcal{C}_t^d$ betrachte

$$\check{X}(h) = \sum_{s \leq t} \Delta X_s - h(\Delta X_s)$$
$$X(h) = X - \check{X}(h).$$

   Dann hat $X(h)$ eine kanonische Zerlegung

$$X(h) = X_0 + M(h) + B(h)$$

   in ein lokales Martingal $M(h)$ und einen Prozess endlicher Variaton $B(h)$. Definiere $B = B(h)$,

$$C^{ij} = \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle$$

   und bezeichne mit ν den Kompensator des Sprungmaßes μ^X. Dann nennt man das Tripel (B, C, ν) die Charakteristiken von X. Oft betrachtet man statt C die modifizierte zweite Charakteristik $\tilde{C}$, die durch

$$\tilde{C}^{ij} = \langle M(h)^i, M(h)^j \rangle$$

   definiert ist. Es gilt:

$$\tilde{C}^{ij} = C^{ij} + h^i h^j * \nu - \sum_{s \leq \cdot} \Delta B_s^i \Delta B_s^j.$$

2. Stochastisches Exponential:(vgl. Jacod/Shiryaev, I.4.61) Für ein $\mathbb{C}$-wertiges Semimartingal X hat die Gleichung

$$Y = 1 + Y_- \cdot X$$

   eine eindeutige (cadlag, adaptierte) Lösung. Diese Lösung ist ein Semimartingal, das wir mit $\epsilon(X)$ bezechnen. Falls X endliche Variation hat, dann hat auch $\epsilon(X)$ endliche Variation und es gilt:

$$\epsilon(X)_t = e^{(X_t - X_0)} \prod_{s \leq t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s}.$$

3. Eigenschaft der Charakteristiken: (vgl. Jacod/Shiryaev,II,2.47) Definiere

$$A(u)_t = iu \cdot B_t - \frac{1}{2} u \cdot C_t u + (e^{iu \cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)) * \nu_t$$

   Sei $T(u) = \inf\{t : \Delta A(u)_t = -1\}$ und $G(u) = \epsilon[A(u)]$, dann gilt: $T(u)$ ist eine predictable time, $T(u) = \inf\{t : G(u)_t = 0\}$, und der Prozess $(e^{iu \cdot X}/G(u))1_{[0,T(u))}$ ist ein lokales Martingal auf $[0, T(u))$.

4. Für einen PII X existiert ein eindeutiges Tripel (B, C, ν), so dass (unter anderem, vgl. Müller, Theorem 3, Jacod/Shiryaev, II.4.15,II.5.2) gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\exp\big(iu\cdot(X_t - X_s)\big)\Big] = \exp\Big(&iu\cdot(B_t - B_s) - \frac{1}{2}u\cdot(C_t - C_s)u \\ &+ \int_s^t\int_{\mathbb{R}^d}\big(e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)\big)1_{J^C}(r)\nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x)\Big) \\ &\prod_{s<r\le t}\Big(e^{-iu\cdot\Delta B_r}\Big(1 + \int_{\mathbb{R}^d}(e^{iu\cdot x} - 1)\nu(\{r\}\times \mathrm{d}x)\Big)\Big)\end{aligned}$$

und

$$\Delta B_t = \nu(\{t\}\times h).$$

Setting und Vorarbeit

Im folgenden sei immer X^n ein d-dimensionales Semimartingal mit $X_0^n = 0$, mit Charakteristiken (B^n, C^n, ν^n) und modifizierter Charakteristik $\tilde{C}^n$. Der Grenzprozess X sei immer ein PII mit Charakteristiken (B, C, ν). Definiere für $t \ge 0, u \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} g(u)_t &= \mathbb{E}(\exp iu\cdot X_t), \\ A^n(u)_t &= iu\cdot B_t^n - \frac{1}{2}u\cdot C_t^n u + (e^{iu\cdot x} - 1 - iu\cdot h(x)) * \nu_t^n, \\ G^n(u)_t &= \epsilon[A^n(u)]_t. \end{aligned}$$

Wir beginnen mit einem Theorem, das uns die Möglichkeit gibt, die Konvergenzaussage dieses Vortrags auf die bereits behandelten Probleme zurückzuführen.

Theorem 1. *Angenommen X hat keine festen Sprungzeiten, dann folgt aus*

$$G^n(u)_t \xrightarrow{P} g(u)_t \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^d,$$

für alle t in einer Teilmenge D von $\mathbb{R}_+$, dass $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$

Bemerkung 2. Die Aussage ist trivial falls die X^n PII-Semimartingale sind, da in diesem Fall $G^n(u)_t = \mathbb{E}^n(\exp iu\cdot X_t^n)$ gilt.

Lemma 3. *Die Abbildung $t \mapsto |g(u)_t|$ ist fallend und für $S(u) = inf\{t : g(u)_t = 0\}$ gilt:*

$$g(u)_{S(u)_-} \neq 0 \quad \text{falls} \quad S(u) < \infty.$$

Insbesondere ist für einen Prozess X ohne feste Sprungzeiten $g(u)_t \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+, u \in \mathbb{R}^d$.

Definition 4. Für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}_+$ und die Charakteristiken (B^n, C^n, ν^n) von X^n bzw.

(B, C, ν) von X definieren wir folgende Eigenschaften:

$$
\begin{array}{rl}
[\beta_5\text{-}D] & B_t^n \xrightarrow{P} B_t \quad \text{für alle } t \in D \\
[\gamma_5\text{-}D] & \tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \tilde{C}_t \quad \text{für alle } t \in D \\
[\delta_{5,i}\text{-}D] & g * \nu_t^n \xrightarrow{P} g * \nu_t \quad \text{für alle } t \in D, g \in C_i(\mathbb{R}^d) \\
[\text{Sup-}\beta_5] & \sup_{s \leq t} |B_t^n - B_t| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \\
[\text{Sup-}\gamma_5] & \sup_{s \leq t} |\tilde{C}_t^n - \tilde{C}_t| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \\
[\text{Sup-}\delta_{5,i}] & \sup_{s \leq t} |g * \nu_t^n - g * \nu_t| \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+, g \in C_i(\mathbb{R}^d)
\end{array}
$$

Für Prozesse X^n mit unabhängigen Zuwächsen sind die Charakteristiken B^n, C^n, ν^n deterministisch und diese Bedingungen stimmen mit den Bedingungen $[\beta_3\text{-}D]$, usw... überein.

Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteigungen

Theorem 5. *Sei X ein Prozess ohne feste Sprungzeiten und $D \subseteq \mathbb{R}_+$*

1. *Angenommen*
$$\sup_{s \leq t} \nu^n(\{s\} \times \{|x| > \epsilon\}) \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{für alle } t \in D, \epsilon > 0 \tag{1}$$
und $[\beta_5\text{-}D]$, $[\gamma_5\text{-}D]$, $[\delta_{5,1}\text{-}D]$ gelten. Dann folgt $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$ und $[\delta_{5,2}\text{-}D]$.

2. *Falls D dicht in $\mathbb{R}$ liegt, dann folgt (1) aus $[\delta_{5,1}\text{-}D]$(und somit aus $[\beta_5\text{-}D]$, $[\gamma_5\text{-}D]$, $[\delta_{5,1}\text{-}D]$ bereits $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$).*

Wir wollen die Aussage aus dem entsprechenden Resultat für PII folgern.

Theorem 6. *(vgl. Jacod/Shiryaev, VII.2.52) Sei X^n ein PII-Semimartingal, X ein PII ohne feste Spungzeiten und $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Unter der Annahme*

$$\lim_n \sup_{s \leq t} \nu^n(\{s\} \times \{|x| > \epsilon\}) = 0 \quad \textit{für alle } \epsilon > 0, t \in D \tag{2}$$

sind äquivalent:

1. $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$
2. $[\beta_3\text{-}D], [\gamma_3\text{-}D], [\delta_{3,i}\text{-}D]$ *für $i = 1$ oder $i = 2$.*

Auch von Theorem 5 existiert eine quadratintegrierbare Version. Falls ν^n die Bedingung

$$|x|^2 * \nu_t^n < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0 \tag{3}$$

erfüllt betrachten wir

$$\hat{B}^n = B^n + (x - h(x)) * \nu^n \tag{4}$$

$$\hat{C}_t^{n,jk} = C_t^{n,jk} + (x^j x^k) * \nu_t^n - \sum_{s \leq t} \Delta \hat{B}_s^{n,j} \Delta \hat{B}_s^{n,k}. \tag{5}$$

Ebenso sei X ein quadratintegrierbares PII-Semimartingal, dann erfüllt auch ν Bedingung (3) und wir können $\hat{B}$ und $\hat{C}$ analog zu (4) bzw. (5) definieren.

Theorem 7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Angenommen zusätzlich zu den bereits genannten Bedingungen hat X keine festen Sprungzeiten und es gelten*

$$\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_n \mathbb{P}^n(|x|^2 1_{|x|>a} * \nu_t^n > \eta) = 0 \quad \textit{für alle } \eta > 0, t \in D, \tag{6}$$

$$[\beta_5'\text{-}D] \qquad \hat{B}_t^n \xrightarrow{P} \hat{B}_t \qquad \textit{für alle } t \in D \tag{7}$$

$$[\gamma_5'\text{-}D] \qquad \hat{C}_t^n \xrightarrow{P} \hat{C}_t \qquad \textit{für alle } t \in D, \tag{8}$$

sowie (3) *und* $[\delta_{5,1}\text{-}D]$*. Dann gilt* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$*.*

Funktionale Grenzwertsätze

Zu zeigen ist noch die Straffheit der Folge (X^n). Hierfür nutzen wir folgendes Straffheitskriterium (vgl. Schmidt-Bruncke, Satz 2.3, Jacod/Shiryaev,VI.4.18): Eine Folge (X^n) von Semimartingalen ist straff, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Die Folge (X_0^n) ist straff;
2. für alle $N \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$,

   $$\lim_{a \uparrow \infty} \text{limsup}_n \mathbb{P}^n[\nu^n([0, N] \times \{|x| > a\}) > \epsilon] = 0;$$

3. Die Prozesse $(B^n), (\tilde{C}^n), (g_p * \nu^n)$ für $g_p(x) = (p|x| - 1)^+ \wedge 1, p \in \mathbb{N}^*$ sind C-Straff

Theorem 8. *Angenommen X hat keine festen Sprungzeiten und D ist eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$. Dann folgt aus $[Sup\text{-}\beta_5], [\gamma_5\text{-}D]$ und $[\delta_{5,1}\text{-}D]$, dass $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. In diesem Fall gilt auch $[Sup\text{-}\gamma_5]$ und $[Sup\text{-}\delta_{5,2}]$*

Bemerkung 9. Der Satz verallgemeinert Theorem 8, $(ii) \Rightarrow (i)$ aus dem letzten Vortrag. Die Rückrichtung gilt im allgemeinen nicht, wenn die X^n keine PII sind.

Theorem 10. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Angenommen ν^n, ν erfüllen* (3)*, dann definiere $\hat{B}^n, \hat{B}$ wie in* (4) *und $\hat{C}^n, \hat{C}$ wie in* (5)*. Angenommen*

$$sup_{s \leq t} |\hat{B^n} - \hat{B}| \xrightarrow{P} 0 \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+,$$

$[\gamma_5'\text{-}D], [\delta_{5,1}\text{-}D]$ *und* (6) *gelten, dann folgt* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. *In diesem Fall gilt außerdem* $[Sup\text{-}\delta_{5,2}]$ *und*

$$sup_{s\leq t}|\hat{C}_s^n - \hat{C}_s| \xrightarrow{P} 0 \qquad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$