Funktionale Grenzwertsätze für Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen

Das Ziel des Vortrages ist es die Verteilungskonvergenz stochastischer càdlàg-Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen zu charakterisieren. Genauer werden wir den Zusammenhang der Konvergenz der stochastischen Prozesse mit der Konvergenz der jeweiligen Charakteristiken untersuchen, wobei sich die Annahme der unabhängigen Zuwächse als sehr nützlich erweisen wird, da in diesem Fall keine größeren stochastischen Probleme auftreten werden, in etwa werden die Charakteristiken deterministisch sein. Mit diesen mächtigen Hilfsmitteln werden wir in der Lage sein das Invarianzprinzip von Donsker in der càdlàg-Version mit relativ geringem Aufwand beweisen zu können.

Vorbereitungen zu Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen

Definition 1 (Unabhängige Zuwächse). Wir sagen ein Prozess A hat *unabhängige Zuwächse* oder kurz A ist PII bzw. $A \in \mathrm{PII}$ (**p**rocess with **i**ndependent **i**ncrements), falls A ein adaptierter, $\mathbb{R}^d$-wertiger càdlàg-Prozess ist mit $A_t - A_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ für alle $t \geq s \geq 0$ und $A_0 = 0$.

Theorem 2. *Ein Prozess X ist genau dann ein PII, wenn ein PII-Semimartingal Y und ein deterministischer càdlàg Prozess A mit $A_0 = 0$ existiert, sodass $X = Y + A$.*

Theorem 3 (Charakteristiken). *Sei $h \in \mathcal{C}_t^d$ eine Abschneidefunktion.*

(*i*) *Sei $X \in \mathrm{PII}$, dann existiert ein eindeutiges Tripel (B, C, ν), wobei B von h abhängt, sodass folgende Aussagen gelten:*

a) $B\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ *ist eine càdlàg-Funktion mit* $B_0 = 0$.

b) $C\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ *ist eine stetige Funktion mit* $C_0 = 0$ *und* $C_t - C_s$ *ist eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix für alle* $t \geq s \geq 0$.

c) ν *ist ein positives Maß auf* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- $\nu(\{0\} \times \mathbb{R}^d) = \nu(\mathbb{R}_+ \times \{0\}) = 0$, $\nu([0,t] \times \{x \mid |x| > a\}) < \infty$ *für alle* $a > 0$;
- $\nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) \leq 1$;
- $\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |h(x - \Delta B_s)|^2 \, \nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) + \sum_{s\leq t} (1 - \nu(\{s\} \times \mathbb{R}^d)) \, |h(-\Delta B_s)|^2 < \infty$;
- $\sum_{s\leq t} \left| \int h(x - \Delta B_s) \nu(\{s\} \times \mathrm{d}x) + (1 - \nu(\{s\} \times \mathbb{R}^d)) h(-\Delta B_s) \right| < \infty$;
- $\Delta B_t = \nu(\{t\} \times h) := \int h(x) \nu(\{t\} \times \mathrm{d}x)$;

d) *Mit* $J := \{t \mid \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d) > 0\}$ *gilt für alle* $t \geq s \geq 0$ *und* $u \in \mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\exp\big(iu \cdot (X_t - X_s)\big)\Big] = \exp\Bigg(& iu \cdot (B_t - B_s) - \frac{1}{2} u \cdot (C_t - C_s) u \\
& + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(e^{iu\cdot x} - 1 - iu \cdot h(x)\big) \chi_{J^c}(r) \nu(\mathrm{d}r, \mathrm{d}x) \Bigg) \qquad (1) \\
& \cdot \prod_{s<r\leq t} \left(e^{-iu\cdot \Delta B_r} \left(1 + \int \big(e^{iu\cdot x} - 1\big) \nu(\{r\} \times \mathrm{d}x) \right) \right).
\end{aligned}
$$

Weiter ist für $t \in \mathbb{R}_+$ die Verteilung von ΔX_t gegeben durch

$$
\nu(\{t\} \times \mathrm{d}x) + \Big(1 - \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d)\Big) \delta_0(\mathrm{d}x).
$$

(*ii*) *Erfüllt das Tripel (B, C, ν) die Eigenschaften a)-c) und ist die rechte Seite von (1) wohldefiniert, so existiert ein $X \in \mathrm{PII}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, sodass (1) gilt. Weiter ist die Verteilung von X eindeutig durch das Tripel (B, C, ν) festgelegt.*

Bemerkung 4. Wie im Semimartingalfall heißen B, C und ν Charakteristiken von X und stimmen für PII-Semimartingale mit den Semimartingalcharakteristiken überein (siehe II.4.15). Die Elemente aus J heißen *feste Sprungzeiten*.

Weiterhin benötigen wir die zweite modifizierte Charakteristik $\tilde{C}_t$, welche definiert ist durch

$$\begin{aligned}\tilde{C}_t^{ij} &:= C_t^{ij} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \big(h^i(x) - \Delta B_s^i\big)\big(h^j(x) - \Delta B_s^j\big)\nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) \\ &\quad + \sum_{s \le t} \Big(1 - \nu(\{s\} \times \mathbb{R}^d)\Big) \Delta B_s^i \Delta B_s^j.\end{aligned}$$

Bemerkung 5. (*i*) Wenn X keine festen Sprungzeiten hat, so sind $B, \tilde{C}$ und $g * \nu$ stetig für alle $g \in C_i(\mathbb{R}^d), i = 1, 2, 4$. Weiter vereinfacht sich die Darstellung der zweiten modifizierten Charakteristik zu

$$\tilde{C}_t^{ij} = C_t^{ij} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} h^i(x) h^j(x) \nu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = C_t^{ij} + h^i h^j * \nu_t.$$

(*ii*) Hiermit ist direkt klar, dass alle $X_t - X_s$ unendlich oft teilbar sind, falls $X \in$ PII keine festen Sprungzeiten besitzt, wobei die Charakteristiken gegeben sind durch

$$b = B_t - B_s, \quad c = C_t - C_s, \quad \tilde{c} = \tilde{C}_t - \tilde{C}_s \quad \text{und } F(\cdot) = \int_s^t \nu(\mathrm{d}r, \cdot).$$

Dies wird uns die Aussagen über die schwache Konvergenz unendlich teilbarer Verteilungen auf die Konvergenz von PIIs erweitern lassen.

Beispiel 6 (Brownsche Bewegung). Die Charakteristiken der Brownschen Bewegung sind gegeben durch

$$B = 0, \quad C_t = \tilde{C}_t = t, \quad \nu = 0.$$

Funktionale Grenzwertsätze und Charakteristiken

Setting. Wir betrachten ab jetzt d-dimensionale Prozesse $X^n, X \in$ PII auf ein und demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ aber bezüglich möglicherweise unterschiedlichen Filtrationen $\mathbb{F}^n, \mathbb{F}$. Weiter bezeichnen wir mit $(B^n, C^n, \nu^n), (B, C, \nu)$ beziehungsweise $(B^n, \tilde{C}^n, \nu^n), (B, \tilde{C}, \nu)$ die Charakteristiken bezüglich derselben stetigen Abschneidefunktion $h \in \mathcal{C}_t^d$.

Wie bereits erwähnt wollen wir die Konvergenz der Charakteristiken der Prozesse in Relation zur Konvergenz der Prozesse setzen und deswegen definieren wir folgende abkürzende Schreibweisen für unterschiedliche Konvergenzarten der Charakteristiken.

Definition 7. Es sei $X \in$ PII und $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Dann definiere folgenden Eigenschaften:

[β_3-D] $B_t^n \to B_t$ für alle $t \in D$

[γ_3-D] $\tilde{C}_t^n \to \tilde{C}_t$ für alle $t \in D$

[δ_{3i}-D] $g * \nu_t^n \to g * \nu_t$ für alle $t \in D, g \in C_i(\mathbb{R}^d)$

[Sup-β_3] $\sup_{s \le t} |B_s^n - B_s| \to 0$ für alle $t \ge 0$

[Sup-γ_3] $\sup_{s \le t} \big|\tilde{C}_s^n - \tilde{C}_s\big| \to 0$ für alle $t \ge 0$

[Sup-δ_{3i}] $\sup_{s \le t} |g * \nu_s^n - g * \nu_s| \to 0$ für alle $t \ge 0, g \in C_i(\mathbb{R}^d)$

und weiter

[Sk-β_3] $\quad B^n \to B$ in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$

[Sk-δ_{3i}] $\quad g * \nu^n \to g * \nu$ in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$ für alle $g \in C_i(\mathbb{R}^d)$

[Sk-$\beta\gamma\delta_3$] $\quad (B^n, \tilde{C}^n, g * \nu^n) \to (B, \tilde{C}, g * \nu)$ in $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{d+d^2+m})$ für alle $m \in \mathbb{N}, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ mit Komponenten in $C_2(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 8. *Angenommen X hat keine festen Sprungzeiten und $D \subseteq \mathbb{R}_+$ ist dicht, so sind folgende beiden Aussagen äquivalent:*

(i) *X^n konvergiert in Verteilung gegen X.*

(ii) *Die Bedingungen* [Sup-β_3], [γ_3-D] *und* [δ_{31}-D] *gelten.*

In diesem Fall gelten sogar [Sup-γ_3] *und* [Sup-δ_{3i}] *für $i = 1, 2$.*

Korollar 9. *Angenommen X^n und X haben keine festen Sprungzeiten, so konvergiert X^n genau dann in Verteilung gegen X, wenn alle endlichdimensionalen Verteilungen von X^n gegen die von X konvergieren und [Sup-β_3] gilt.*

Korollar 10. *Es seien $X^n, X \in$ PII mit den Charakteristiken $B^n_t = b^n t, C^n_t = c^n t, \nu^n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mathrm{d}t \otimes F^n(\mathrm{d}x)$ und $B_t = bt, C_t = ct, \nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mathrm{d}t \otimes F(\mathrm{d}x)$ für $b^n, b \in \mathbb{R}^d, c^n, c \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und Maße F^n, F auf $\mathbb{R}^d$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X^n konvergiert in Verteilung gegen X.*

(ii) *X^n_1 konvergiert in Verteilung gegen X_1.*

(iii) *Die Bedingungen* [β_1], [γ_1], [δ_{11}] *gelten bezüglich $(X^n_1), X_1$.*

Bemerkung 11. Die Prozesse, welche die Voraussetzungen des obigen Korollars erfüllen, sind genau die Prozesse mit unabhängigen, stationären Zuwächsen (siehe Korollar II.4.19).

Wie im Fall der unendlich teilbaren Verteilungen lassen sich die obigen Ergebnisse umformulieren, falls eine Art der Quadratingegrierbarkeit gegeben ist, genauer fordert man

$$|x|^2 * \nu^n_t < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0. \tag{2}$$

In diesem Fall existiert ein eindeutiger vorhersagbarer (sogar deterministischer) Prozess $\hat{B}^n$ mit endlicher Variation, sodass $X^n - \hat{B}^n$ ein lokales Martingal ist und weiter kann man zeigen, dass

$$\hat{B}^n = B^n + (x - h(x)) * \nu^n \tag{3}$$

gilt. Weiter betrachtet man in diesem Fall anstatt der modifizierten zweiten Charakteristiken folgende Ausrücke

$$\hat{C}^{n,ij}_t := C^{n,ij}_t + (x^i x^j) * \nu^n_t - \sum_{s\leq t} \Delta \hat{B}^{n,i}_s \Delta \hat{B}^{n,j}_s. \tag{4}$$

Theorem 12. *Angenommen die X^n sind d-dimensionale PII-Semimartingale und $X \in$ PII hat keine festen Sprungzeiten. Weiter erfüllen ν^n und ν die Integrabilitätsbedingung* (2) *und es gelte*

$$\lim_{a\nearrow\infty} \limsup_{n\to\infty} |x|^2 \chi_{\{|x|>a\}} * \nu^n_t = 0 \quad \textit{für alle } t \in D \tag{5}$$

für eine dichte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}_+$. Dann konvergiert X^n genau dann in Verteilung gegen X, wenn

[Sup-β'_3] $\quad \sup_{s\leq t} \left|\hat{B}^n_s - \hat{B}_s\right| \to 0 \quad$ *für alle $t \geq 0$*

[γ'_3-D] $\quad \hat{C}^n_t \to \hat{C}_t \quad$ *für alle $t \in D$*

und [δ_{31}-D] *gilt. In diesem Fall gilt darüberhinaus [Sup-δ_{3i}] für $i = 1, 2, 4$ und*

[Sup-γ'_3] $\quad \sup_{s\leq t} \left|\hat{C}^n_s - \hat{C}_s\right| \to 0 \quad$ *für alle $t \geq 0$.*

Lemma 13. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}_+$ dicht und weiter habe X keine festen Sprungzeiten. Dann gelten folgende Äquivalenzen:* [γ_3-D] $\Leftrightarrow$ [Sup-γ_3], [γ'_3-D] $\Leftrightarrow$ [Sup-γ'_3], [δ_{3i}-D] $\Leftrightarrow$ [Sup-δ_{3i}] *für $i = 1, \ldots, 4$.*

Korollar 14 (Satz von Donsker). *Es seien* $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge reeller, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit* $\mathbb{E}[\xi_k] = 0$ *und* $\mathbb{E}[\xi_k^2] = 1$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Dann konvergiert der Prozess*

$$X_t^n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k$$

in Verteilung gegen eine standartisierte Brownsche Bewegung.

Theorem 15. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(*i*) X^n *konvergiert in Verteilung gegen* X*.*

(*ii*) [Sk-β_3], [γ_3-D] *und* [Sk-δ_{31}] *gelten, wobei* $D \subseteq \mathbb{R}_+$ *dicht ist.*

In diesem Fall gilt [γ_3-D] *mit* $D := \mathbb{R}_+ \setminus J(X)$ *und weiter* [Sk-$\beta\gamma\delta_3$].

Korollar 16. *Falls* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ *für eine Folge* $(X^n) \subseteq \mathrm{PII}$ *von Prozessen ohne feste Sprungzeiten gilt, so besitzt auch* X *keine festen Sprungzeiten.*