Konvergenz gegen einen Prozess mit unabhängigen Zuwächsen - Anwendungen

Saskia F. Glaffig 20.07.17

"Wiederholung"

Definition (vgl. Jacod, Shiryaev, I.3.26: Poissonprozess)**.** Ein *erweiterter Poissonprozess auf* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ist ein adaptierter Punktprozess N mit den Eigenschaften

(i) $\mathbb{E}(N_t) < \infty$ für alle $t \geq 0$,

(ii) $N_t - N_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \leq s \leq t$.

Die Funktion $a(t) = \mathbb{E}(N_t)$ heißt Intensität von N. Ist a stetig, so nennen wir N einen *Poissonprozess.*

Proposition. *(vgl. Jacod, Shiryaev, VI.2.4) Die Funktion* $\alpha \rightsquigarrow \sup_{t \leq a} |\Delta\alpha(t)|$ *sind stetig (bzgl. der Skorokhod-Topologie) an jedem Punkt* α *mit* $a \notin J(\alpha)$*.*

Satz (Jacod, Shiryaev, VI.3.37)**.** *Seien* X^n, X *wachsende Prozesse, so dass entweder* X *stetig ist oder* X *und* $X^1, X^2, ...$ *Punktprozesse sind. Gilt* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(D)} X$ *für eine dichte Teilmenge* D *von* $\mathbb{R}_+$*, so folgt* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$*.*

Wir benötigen die folgenden (größtenteils schon eingeführten) Bezeichnungen:

$$
\begin{array}{rl}
[\beta_5\text{–}D] & B_t^n \xrightarrow{P} B_t \qquad \forall t \in D \\
[\gamma_5\text{–}D] & \tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} \tilde{C}_t \qquad \forall t \in D \\
[\delta_{5,i}\text{–}D] & g * \nu_t^n \xrightarrow{P} g * \nu_t \qquad \forall t \in D, g \in \mathcal{C}_i(\mathbb{R}^d) \\
[\text{Sup–}\beta_5] & \sup_{s \leq t} |B_s^n - B_s| \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \\
[\hat{\gamma}_5\text{–}D] & \hat{C}_t^n \xrightarrow{P} \hat{C}_t \qquad \forall t \in D \\
[\hat{\delta}_5\text{–}D] & \nu^n([0,\text{t}] \times \{|x| > \epsilon\}) \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t \in D, \forall \epsilon > 0.
\end{array}
$$

Weiter benötigen wir die Definitionen bzw. Darstellungen der Charakteristiken (B, C, ν) (für Semimartingale) bzgl. einer Abschneidefunktion $h \in \mathcal{C}_t^d$ und gegebenenfalls deren

Modifikationen:

$$
\begin{aligned}
&\check{X}_t(h) = \sum_{s\leq t}(\Delta X_s - h(\Delta X_s)),\\
&X(h) = X - \check{X}_t(h) \quad \text{mit kanonische Zerlegung } X_0 + M(h) + B(h),\\
&C^{ij} = \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle,\\
&\tilde{C}^{ij} = \langle M(h)^i, M(h)^j\rangle = C^{i,j} + (h^i h^j) * \nu_t^n - \sum_{s\leq .} \Delta B_s^i \Delta B_s^j,\\
&B' = B + (x - h(x)) * \nu,\\
&\tilde{C}'^{ij} = C^{ij} + (x^i x^j) * \nu - \sum_{s\leq .} \Delta B_s^i \Delta B_s^j = \langle (X - B')^i, (X - B')^j\rangle,\\
&\hat{C}^{ij} = \left[M^i, M^j\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Für ein stetiges Semimartingal X mit unabhängigen und identische verteilten Zuwächsen und Semimartingale X^n gilt die folgende Äquivalenz (Jacod, Shiryaev; VIII.3.5):

$$
[\hat{\delta}_5\text{–}D] \Leftrightarrow \left\{ \sup_{s\leq t} |\Delta X_s| \xrightarrow{P} 0 \text{ für alle } t \in D \right\}. \tag{2}
$$

Dies folgt direkt aus VI.4.22 (s.a. Vortrag 2) und der Stetigkeit von X.

Satz (vgl. Jacod, Shiryaev, VIII.3.8). *Sei X ein stetiges d-dimensionales PII-Semimartingal mit Charakteristiken $(B, C, 0)$ und X^n d-dimensionale Semimartingale. Weiter sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$.*

a) *Falls $X^n \to X$, so ist $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$ erfüllt.*

b) *Unter $[\text{Sup–}\beta_5]$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

   (i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

   (ii) $[\gamma_5\text{–}D] + [\hat{\delta}_5\text{–}D]$,

   (iii) $[\hat{\gamma}_5\text{–}D] + [\hat{\delta}_5\text{–}D]$

1. Konvergenz gegen einen Poissonprozess

In diesem Abschnitt sei X ein Poissonprozess mit Intensität A. Die Charakteristiken von X werden mit (B, C, ν) bezeichnet und sind gegeben durch

$$
B_t = h(1)A_t \ , \quad C_t = 0 \ , \quad \nu(dt, dx) = dA_t \otimes \delta_1(dx) \ , \tag{3}
$$

wobei δ_1 das Diracmaß am Punkt 1 bezeichne und $h \in \mathcal{C}_t^d$ eine Abschneidefunktion sei.

Theorem 1. *Sei X ein Poissonprozess mit Intensität A und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X^n ein Punktprozess mit Kompensator A^n. Weiter sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$. Gilt*

$$
A_t^n \xrightarrow{P} A_t \qquad \forall t \in D, \tag{4}
$$

so folgt $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Bemerkung 2. Die Umkehrung der Aussage gilt im Allgemeinen nicht: Sei X ein Poissonprozess auf einer stochastischen Basis $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ und $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Sprungzeiten. Sei X^n auf derselben stochastischen Basis definiert durch

$$X_t^n = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{\{T_k+1/n<t\}} \tag{5}$$

Dann gilt $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ und da X^n vorhersagbar bzgl. $\mathbb{F}$ ist, ist $A^n = X^n$. Also ist (2) nicht erfüllt.

Theorem 3. *Sei X ein Poissonprozess mit Intensität A und X^n ein 1-dimensionales Semimartingal. Weiter sei die Abschneidefunktion $h \in \mathcal{C}_t^d$ so gewählt, dass $h(1) = 0$. Unter den Bedingungen*

(i) $\sup_{s\leq t} |B_s^n| \xrightarrow{P} 0$ *für alle* $t \geq 0$,

(ii) $\tilde{C}_t^n \xrightarrow{P} 0$ *für alle* $t \geq 0$,

(iii) $\nu^n([0,t] \times \{x : |x-1| > \epsilon, |x| > \epsilon\}) \xrightarrow{P} 0$ *für alle* $t \geq 0$, $\epsilon > 0$,

(iv) $\nu^n([0,t] \times \{x : |x-1| \leq \epsilon\}) \xrightarrow{P} A_t$ *für alle* $t \geq 0$, $\epsilon \in (0,1)$,

gilt $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

2. Zentraler Grenzwertsatz: Der Martingalfall

Wir nehmen im Folgenden an, dass $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge d–dimensionaler lokaler Martingale ist. Dann gilt (siehe Jacod, Shiryaev, II.2.29,a)

$$\begin{aligned} |x|^2 \wedge |x| * \nu_t^n < \infty \quad \forall t \geq 0, \\ B^n = (h(x) - x) * \nu^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Der Prozess X sei ein stetiges Gauß'sches Martingal, d.h. ein PII mit Charakteristiken $(0, C, 0)$. Wir definieren die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &[\hat{\gamma}_5'\text{–}D] \qquad [X^{n,i}, X^{n,j}]_t \xrightarrow{P} C_t^{ij} \quad \forall t \in D \\ &[\gamma_5'\text{–}D] \qquad \langle X^{n,i}, X^{n,j}\rangle_t \xrightarrow{P} C_t^{ij} \quad \forall t \in D, \end{aligned}$$

die zweite Bedingung nur falls jedes X^n lokal quadratisch integrierbar ist. Ist D dicht in $\mathbb{R}_+$, so gilt

$$[\gamma_5'\text{–}D] \Leftrightarrow [X^n, X^n] \xrightarrow{\mathcal{L}} C. \tag{7}$$

Theorem 4. *Sei X ein stetiges Gauß'sches Martingal mit Charakteristiken $(0, C, 0)$ und jedes X^n ein lokales Martingal. Es gelte $|\Delta X^n| \leq K$ gleichmäßig in n. Ist D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

(ii) $[\hat{\gamma}'_5\text{–}D]$,

(iii) $[\gamma'_5\text{–}D]$ *und* $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$.

Theorem 5. *Sei X ein stetiges Gauß'sches Martingal mit Charakteristiken $(0, C, 0)$ und jedes X^n ein lokales Martingal. Weiter sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$ und es gelte*

$$\lim_{a \nearrow \infty} \limsup_n \mathbb{P}(|x| \mathbf{1}_{\{|x|>a\}} * \nu_t^n > \eta) = 0 \quad \textit{für alle } \eta > 0, t > 0. \tag{8}$$

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

(ii) $[\hat{\gamma}'_5\text{–}D]$,

(iii) $[\hat{\gamma}_5\text{–}D]$ *und* $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$,

(iv) $[\gamma_5\text{–}D]$ *und* $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$.

Lemma 6. *Unter den Bedingungen (8) und $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$ gilt:*

$$[\mathrm{Var}\text{–}\beta_5] \qquad \mathrm{Var}(B^{n,j})_t \xrightarrow{P} 0 \quad \forall t \geq 0, j \leq d.$$

Achtung: $\mathrm{Var}(B^{n,j})$ bezeichnet hier den Variationsprozess von $B^{n,j}$, nicht dessen Varianz.

Lemma 7. *Unter den Bedingungen $[\mathrm{Var}\text{–}\beta_5]$ und $[\hat{\delta}_5\text{–}D]$ gilt $[\hat{\gamma}'_5\text{–}D] \Leftrightarrow [\hat{\gamma}_5\text{–}D]$.*

Theorem 8. *Sei X ein stetiges Gauß'sches Martingal mit Charakteristiken $(0, C, 0)$ und jedes X^n ein quadratisch integrierbares lokales Martingal. Sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Bedingung*

$$|x|^2 \mathbf{1}_{\{|x|>\epsilon\}} * \nu_t^n \xrightarrow{P} 0 \quad \textit{für alle } t \geq 0, \epsilon > 0. \tag{9}$$

Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) (9) *und* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$,

(ii) (9) *und* $[\gamma'_5\text{–}D]$,

(iii) (9) *und* $[\hat{\gamma}'_5\text{–}D]$,

(iv) (9) *und* $[\gamma_5\text{–}D]$,

(v) (9) *und* $[\hat{\gamma}_5\text{–}D]$,

(vi) $[\gamma_5'\text{–}D]$ *und* $[\hat{\gamma}_5'\text{–}D]$,

(vii) $[\gamma_5'\text{–}D]$ *und* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

3. Normierte Summen von iid Semimartingalen

Sei $(\mathcal{B}^n, Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge identischer Kopien eines Paares $(\mathcal{B}, Y)$, wobei $\mathcal{B} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein stochastische Basis und Y ein 1–dimensionales Semimartingal auf $\mathcal{B}$ mit $Y_0 = 0$ ist. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ das Tensorprodukt aller $\mathcal{B}^n$'s.

Theorem 9. *Sei zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen Y ein lokales Martingal für welches die Funktion $C_t = \mathbb{E}(Y_t^2)$ nur endliche Werte annimmt und stetig ist. Dann konvergiert die Folge $(X^n)_n$, definiert durch*

$$X^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{1\le p\le n} Y^p, \tag{10}$$

in Verteilung gegen einen Wiener Prozess mit Charakteristiken $(0, C, 0)$.

4. Grenzwertsätze für stationäre Prozesse

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ eine Gruppe von messbaren, maßerhaltenden Verschiebungen: Jedes θ_t ist eine messbare Abbildung von $(\Omega, \mathcal{F})$ nach $(\Omega, \mathcal{F})$ und es gelte $\mathbb{P}\circ\theta_t^{-1} = \mathbb{P}$ sowie $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Außerdem sei $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ergodisch.
Unser stationärer Prozess ist ein reellwertiger Prozess $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$, so dass $Y_t\circ\theta_s = Y_{t+s}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt und die Abbildung $(\omega, t) \rightsquigarrow Y_t(\omega)$ $\mathcal{F}\otimes\mathbb{R}$-messbar ist. Wir setzen $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s : s \in \mathbb{R}, s \le t)$, d.h. es gilt $\mathcal{F}\circ\theta_t^{-1} = \mathcal{F}_0$.

Theorem 10. *Zusätzlich zu den obigen Voraussetzungen sei $p \in [2,\infty]$ und $q \in [1,2]$ der zu p konjugierte Exponent. Weiter gelte*

$$\begin{aligned} &\|Y_0\|_p < \infty \\ &\int_0^\infty \|\mathbb{E}(Y_t|\,\mathcal{F}_0)\|_q \; dt < \infty \end{aligned} \tag{11}$$

Die Folge der Prozesse $(X^n)_n$ sei definiert durch

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} Y_s \; ds, \qquad t \ge 0. \tag{12}$$

Dann gilt $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{R}_+)} \sqrt{c}W$, wobei W ein Standard–Wiener Prozess ist und c durch

$$c = 2\int_0^\infty \mathbb{E}(Y_0 Y_t) \; dt. \tag{13}$$

gegeben ist. Im Fall $p = 2$ *gilt sogar* $X^n \xrightarrow{\mathcal{L}} \sqrt{c}W$.