

Mikrostrukturen von Finanzmärkten

Irena Halim und Winfried Stute

Mathematisches Institut



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Grundlegende Definitionen	9
2.1	Strukturkomponenten der Märkte	9
2.2	Qualitätskomponenten der Märkte	12
3	Inventar-Modelle	13
3.1	Auftragsankunft	13
3.2	Marketmaker-Markt	18
3.2.1	Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines stochastischen Prozesses	19
3.2.2	Die Ausfallwahrscheinlichkeit unter einem Masswechsel	22
3.2.3	Verallgemeinerung des Modells von Garman	24
3.2.4	Die Eigenschaften des verallgemeinerten Marketmaker-Prozesses unter Masswechsel	30
3.2.5	Monte-Carlo-Simulation unter Masswechsel zur Berechnung der Aus- fallwahrscheinlichkeit	37
3.2.6	Die Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmakers	42
3.2.7	Gewinnmaximierungsproblem	47
3.3	Auktionsmärkte	49
3.3.1	Der Fall: $K = 1$	52
4	Ausblick	57
A	Kovarianzfunktion des zusammengesetzten Poisson-Prozesses	59
B	Simulation der Funktion $\kappa(s)$ und ihrer Nullstellen	61
C	Monte-Carlo-Simulation des Prozesses unter Masswechsel	62
	Literaturverzeichnis	65

Abbildungsverzeichnis

2.1	Kumulierte Angebote in einer bestimmten Stunde	11
2.2	Angebots- und Nachfragefunktion	12
3.1	Stochastische kumulierte Angebots- und Nachfrageraten als Preisfunktion zum Zeitpunkt t [3].	18
3.2	Simulation der Funktion $\kappa(s)$ und die Nullstelle $\gamma > 0$	28
3.3	Ein Pfad des Prozesses $(X(t))_{t \geq 0}$ auf $\{\tau < \infty\}$	33
3.4	Plotte der Pfade des Prozesses X unter Masswechsel im konstanten Fall	39
3.5	Plotte der Pfade des Prozesses X unter Masswechsel im exponentiellen Fall	41
3.6	Marketmaker-Profitrate [3].	47
3.7	Zustandsbeschreibung einer Doppelauktion zum Zeitpunkt $t \geq 0$ [3].	50
3.8	Zustandsübergangsintensitäten-Diagramm.	52

Tabellenverzeichnis

3.1	Approximation von γ für verschiedene Parameter	30
3.2	Simulation der Ruinzeitpunkte und der Überschüsse von n Pfaden des Prozesses X unter Masswechsel	38
3.3	Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeiten unter verschiedenen Parametern für $n = 1000$ und $d = 8$	41

1 Einleitung

Auf einem Markt bzw. an einer Börse agieren Marktteilnehmer mit verschiedenen Handelsmotiven unter spezifischen Handelsregeln. Unter einer gewissen Marktstruktur werden also Preise gebildet und Austauschprozesse durchgeführt.

Eine *Marktmikrostruktur* ist die Erforschung des Handelsprozesses und dessen Ergebnis unter expliziten Handelsregeln ([11], S.1).

Die Marktmikrostrukturliteratur untersucht die durch spezifische Handelsregeln bereitgestellte Marktstruktur. Damit versucht sie unter anderem, die Auswirkungen der Handelsstruktur auf den Preisbildungsprozess sowie den Zusammenhang zwischen Marktmechanismus und Marktteilnehmerverhalten zu erklären.

Das Ziel der Marktmikrostruktur ist, Aussagen über die Effizienz des Marktes unter spezifischen Handelsregeln zu treffen. Dies wird in der Marktregulierung und in der Gestaltung und Formulierung neuer Handelsorganisationen angewendet, um die Qualität des Marktes zu optimieren, die durch z.B. Liquidität, Volatilität charakterisiert wird (Vgl. [11]).

Die Marktmikrostrukturliteratur bietet zahlreiche Modellansätze zur Entwicklung des Preisprozesses in den Märkten mit unterschiedlichen Strukturen.

Die Entwicklung der Marktmikrostrukturtheorie wurde durch die wirtschaftlichen Veränderungen auf den Finanz- und Warenmärkten weltweit angetrieben. Globalisierung, Steigerung des Handelsvolumens, Wettbewerb zwischen den Märkten und elektronischen Handelssystemen, neue technologische Innovationen, Ausbreitung des Internets, Verbreitung von neuen Finanzinstrumenten etc. haben das Interesse an der Marktmikrostruktur geweckt (Vgl. [10], S.3). Marktmikrostruktur findet auch Anwendung z. B. in der Bewertung der Finanztitel, der Unternehmensfinanzierung und der Investitionen.

Die Forschung zur Marktmikrostruktur ist sehr umfangreich und unterschiedlich in der Thematik. Es kristallisierten sich vor allem zwei Entwicklungsrichtungen heraus, nämlich die bestands- sowie die informationsbasierten Mikrostrukturmodelle. Die früheren Arbeiten untersuchten überwiegend die Rolle des Inventars bei dem Händlerverhalten und den Wertpapierpreisen unter der Annahme symmetrischer Informationen, in den jüngsten Arbeiten kam die Informationsökonomie und die Spieltheorie hinzu [11].

Einen Überblick über die vielen Marktmikrostrukturmodelle, denen unterschiedliche Marktstrukturen zugrunde liegen, geben z.B. O'Hara [11], Lüdecke [9], Madhavan [10].

O'Hara beschreibt in [11] die Entwicklung der Marktstrukturtheorie und liefert eine detaillierte Erforschung einiger theoretischer Studien.

Lüdecke analysiert in [9] einige Modelle der Marktmikrostruktur und führt auf deren Grundlage empirische Untersuchungen des Handels an der Deutschen Terminbörse durch, um Aufschluss über die Qualität des Aktienoptionshandels zu geben.

Madhavan betrachtet in [10] selektiv theoretische, empirische und experimentelle Studien zu Märkten, die sich mit der Preisbildung, dem Marktdesign, der Informationsökonomik auseinandersetzen, und verweist auf Forschungsdefizite.

Diese Arbeit analysiert aus dem Blickwinkel der Finanzmathematik einige ausgesuchte Modelle der Marktmikrostruktur.

1 Einleitung

In Kapitel 2 werden zuerst die grundlegenden Strukturkomponenten der Organisation von Märkten erläutert, um deren Funktionsweise zu verstehen und die Voraussetzungen für die Preisfestsetzung zu schaffen.

Kapitel 3 behandelt die finanzmathematische Analyse eines konkreten Marktmodells von Garman in [3]. Es handelt sich um ein inventarbasiertes Modell. Er untersucht den Zusammenhang zwischen dem Auftragsstrom und den zustandekommenden Preisen auf bestimmten Märkten. Sein Modell wurde mehrfach erweitert und modifiziert [11].

2 Grundlegende Definitionen

2.1 Strukturkomponenten der Märkte

Die Rahmenbedingungen eines Handels können durch konkrete Strukturkomponenten gestaltet werden. Ein Marktmechanismus kann beispielweise durch

- das Handelsgut,
- den Handelsort,
- die Marktteilnehmer,
- die Art der Aufträge,
- den Preisfindungsmechanismus,
- die Handelsfrequenz,
- die Markttransparenz,
- die Automatisierung

charakterisiert werden (Vgl. z.B. [11], [9]). Die genannten Komponenten sind weder überschneidungsfrei noch vollständig, was den folgenden Erläuterungen entnommen werden kann.

Bei dem Handelsgut kann es sich um Waren, Dienstleistungen, Rechte etc. handeln.

Der Austausch der Güter kann an

- einem zentralen Ort,
- oder dezentral

organisiert sein. Mehrere börsenbasierte Märkte können durch Computernetzwerke gekoppelt werden, um Informationen auszutauschen und Gebote der Anleger der jeweiligen Börse gemeinsam zu berücksichtigen (Vgl. [5]).

O'Hara gruppiert in [11] die Marktteilnehmer in vier Arten:

- *Kunden*, die Aufträge zum Kauf oder Verkauf einreichen;
- *Makler*, die Aufträge für die Kunden vermitteln und auf fremde Rechnung handeln;
- *Händler*, die auf eigene Rechnung handeln;
- *Marketmaker*, die verbindliche *Bid-* und *Ask-Preise* („Quotes“) zum Kauf oder Verkauf der Wertpapiere quotieren.

Die Differenz zwischen dem Bid- und Ask-Preis eines Marketmakers zu einem Zeitpunkt ist der *Marketmaker-Spread*. Die Differenz zwischen dem jeweils besten Bid-Preis und dem besten Ask-Preis im konkurrierenden Markt zu einem Zeitpunkt ist der *Markt-Spread*. Da die Marketmaker jeder Zeit bereit zu handeln sind, bieten sie Liquidität am Markt und ermöglichen einen kontinuierlichen Handel.

Je nach Art des Börsenverfahrens können verschiedene Arten von Aufträgen in ein Orderbuch aufgegeben werden. Die wesentlichen sind z.B. die folgenden (Vgl. z.B. [10]):

- *Market-Order* ist ein Auftrag, der zum besten gegebenen Marktpreis ausgeführt wird,
- *Limit-Order* ist ein Auftrag, der dann ausgeführt wird, wenn das vorgegebene Preislimit erreicht wird.

2 Grundlegende Definitionen

An einer Börse herrschen zwei Preisfindungsmechanismen vor:

- das *Marketmaker-Prinzip*,
- das *Auktionsprinzip*.

Nach dem Marketmaker-Prinzip schließt ein Investor zum Bid- oder Ask-Preis des Marketmakers zu einem beliebigen Zeitpunkt ab. Nach dem Auktionsprinzip wird der Auktionspreis im Wettbewerb zwischen Investoren ohne Vermittler ermittelt, in dem die Kauf- und Verkaufsaufträge im Orderbuch gegeneinander gestellt werden. Dabei werden auf der jeweiligen Seite die besten Gebote der Marktteilnehmer berücksichtigt. Märkte, auf denen das Marketmaker-Prinzip herrscht, werden als „Quote-Driven“ und Märkte, auf denen das Auktionsprinzip herrscht als „Order-Driven“ bezeichnet (Vgl. [9], S.29, [10], S.224).

Während die Quote-Driven-Märkte kontinuierlichen Handel aufweisen, können Auktionen wiederum entweder

- *periodisch*, zu bestimmten Zeitintervallen,
- oder *kontinuierlich*, zum beliebigen Zeitpunkt in der Öffnungszeit,

ausgeführt werden. Je nach Frequenz der Auktion wird zwischen dem *Einheitspreis* und dem *Einzelpreis* unterschieden. Beim Einheitspreis kommen zum Ausführungszeitpunkt der Auktion Angebot und Nachfrage (bei geringstem Überhang) im Orderbuch zum Ausgleich. Die Einzelpreise werden fortlaufend errechnet, in dem das aktuelle beste Gebot auf der betreffenden Seite genommen wird.

Markttransparenz ist der Umfang von Informationen über den Handelsprozess, die die Marktteilnehmer beobachten können (Vgl. z.B. [11]). Dazu zählen z.B. Einsicht in das Orderbuch bei Auktionsmärkten, das die Gebotspreise, Auftragsmengen und -zeiten, Quotes, Identität der Marktteilnehmer, ect. offenlegen kann. Es wird auch zwischen Vor- und Nachhandelstransparenz unterschieden, zu denen die Informationen zählen, die vor einem und nach einem Handel veröffentlicht werden.

Verschiedene Prozesse und Funktionen wie die Auftragsübermittlung, die Preisermittlung, die Auftragsausführung, die Veröffentlichung von Marktinformationen, das Clearing und Settlement sowie die Überwachung des Handels und der Systembenutzer können automatisiert werden. Vollautomatisierte Börsen verfügen über ein elektronisches Limitorderbuch, automatische Auftragsausführung, ein computerisiertes Orderroutingssystem, ein Informationssystem, ein Clearingsystem und ein Marktüberwachungssystem [9], S. 39-40.

Das nachfolgende Beispiel veranschaulicht das Marktdesign eines konkreten Marktes, der sogenannten Day-Ahead-Auktion.

Beispiel 2.1 (Vgl. [5], [6]) Eine Day-Ahead-Auktion ist eine zentrale periodisch geschlossene Auktion an der EEX (European Energy Exchange), die auch als „Einheitspreisauktion“ bekannt ist. Die Kontrakte für eine bestimmte Stromstunde werden für die in dieser Stunde handelnden Auktionsteilnehmer zum für diese Stunde geltenden einheitlichen Preis abgeschlossen. Die Marktteilnehmer an der EEX sind registrierte Kunden, zu denen Elektrizitätserzeuger, Energieversorgungsunternehmen, Energiehändler, Banken, Elektrizitätskunden etc. zählen.

An dieser Auktion werden täglich um 12 Uhr Stromstundenkontrakte sowie Blockkontrakte für den folgenden Tag gehandelt, für die die Gebote bis 12 Uhr abgegeben werden müssen.

Die Stundengebote werden für jede einzelne Stunde, Blockgebote für mehrere zusammenhängende Stunden verdeckt abgegeben. Für Blockgebote gibt es eine Reihe an standardisierten als auch von den Marktteilnehmern frei definierten Blöcken (siehe z.B. [6]). Der zulässige Preis für alle Kontrakte darf zwischen -500 €/MWh 3.000 €/MWh liegen. Der Mindestvolumen der Kontrakte beträgt 0,1 MWh.

Preisfindungsalgorithmus: „Ermittlung des Einheitspreises nach dem Merit-Order-Prinzip, der den Markt räumt.“

1. Schritt: Abgabe der Kauf oder Verkaufsaufträge jedes Marktteilnehmers für jeweilige Einzelstunden oder Blöcke, die mehrere Preise und Mengen unterschiedlich verknüpfen können.
2. Schritt: Ermittlung des Preises je Einzelstunde aus dem Schnitt der kumulierten Angebots- und Nachfragefunktion.
 - a) Berechnung aus den individuellen Angebots- und Nachfragefunktionen der kumulierten Angebots- und Nachfragefunktion pro Einzelstunde.
 - i. Sortierung der Gebote der Verkäufer aufsteigend nach Preis, wie die Abbildung 2.1 veranschaulicht (siehe [7]). Jeder Balken stellt ein Kraftwerk dar.

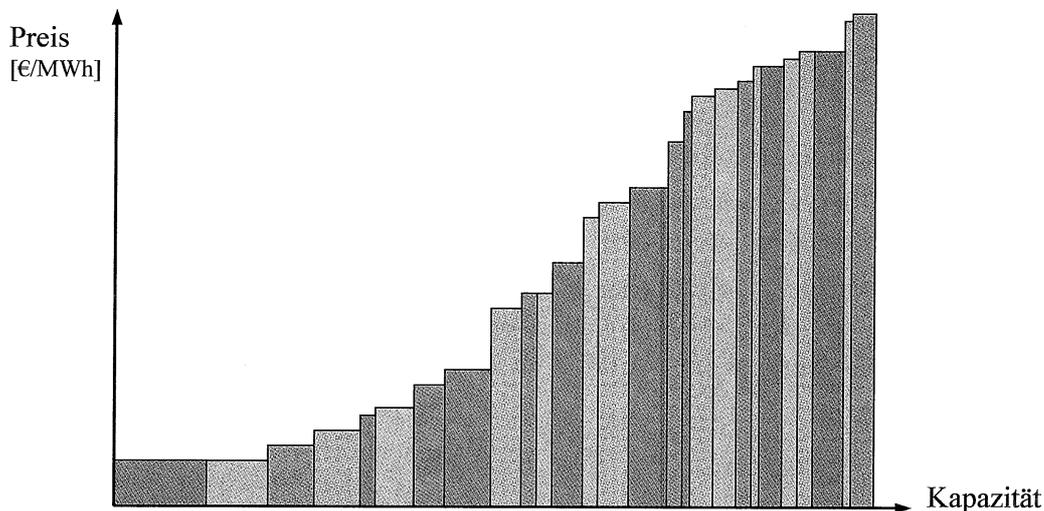


Abbildung 2.1: Kumulierte Angebote in einer bestimmten Stunde

Die Größe des Balkens spiegelt auf der Ordinate das Gebot (€/MWh) und auf der Abszisse die angebotene Stromkapazität eines Kraftwerks (MWh). Die farblichen Markierungen kennzeichnen die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Anbieter.

- ii. Sortierung der Gebote der Käufer in absteigender Reihenfolge.
 - iii. Interpolation der Gebote zu linearen Funktionen.
 - b) Bestimmung des Preises für alle Einzelstunden. In der Abbildung 2.2 gibt der Schnittpunkt der Funktionen den Einheitspreis pro MWh und die gehandelte Strom-Gesamtmenge in einer bestimmten Stunde an.
3. Schritt: Ausschließung des Blockgebots aus der Auktion, das bei den im zweiten Schritt ermittelten Stundenpreisen den höchsten Verlust macht, falls solches existiert.
 - a) Dabei werden die im zweiten Schritt ermittelten Preise für Stundenblöcke kumuliert, zu denen Gebote im 1. Schritt abgegeben wurden.
 - b) Danach werden die Blockgebote ermittelt, die auf der Angebotsseite einen höheren Preis und, die auf der Nachfrageseite einen niedrigeren Preis als die entsprechend kumulierte Summe stellen.
 - c) Es wird der Block mit der höchsten Differenz abgelehnt. Ergeben mehrere Blockgebote die gleiche Differenz, so wird das Gebot mit dem geringeren Volumen ausgeschlossen.

2 Grundlegende Definitionen

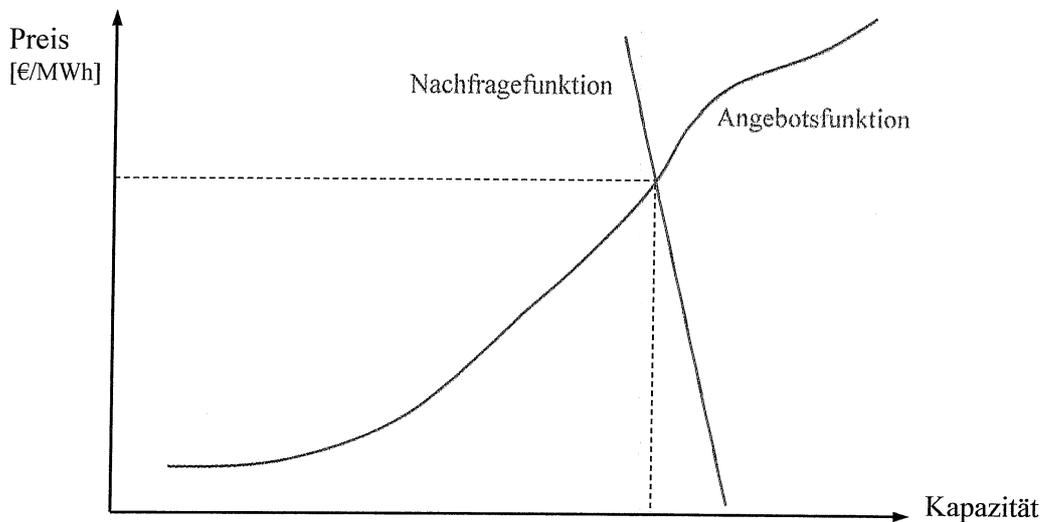


Abbildung 2.2: Angebots- und Nachfragefunktion

d) Wiederholung der Iteration ab Schritt 2.

4. Schritt: Erfüllen alle die noch verbliebenen Blöcke mindestens ihre Gesamtforderung, so ist der im zweiten Schritt ermittelte Preis der endgültige Markträumungspreis.

Im Allgemeinen kommt es zur Markträumung. Manchmal kann kein Markträumungspreis bestimmt werden, bei dem Angebot und Nachfrage ins Gleichgewicht kommen. In diesem Falle gibt es zusätzliche Regelungen, die etwa in [6] zu finden sind.

2.2 Qualitätskomponenten der Märkte

Die Marktstruktur versucht, Aufschluss über die Qualität des Marktes zu geben. Die *Handelskosten* der Anleger und die *Liquidität* des Marktes spiegeln die Marktqualität wieder.

Lüdecke unterscheidet in [9] zwischen *expliziten* Kosten, die die Transaktionsgebühren, Provisionen und Transaktionssteuern enthalten, und *impliziten* Kosten, die die Bid-Ask-Spreads sowie Ausführungskosten enthalten.

Ein Markt ist liquid, wenn auf ihm zu jeder Zeit ein bestimmtes Handelsgut zum Kauf oder Verkauf zu einem fairen Preis angeboten werden kann.

Jede Handelsorganisation hat ihre Regeln, die die Funktionsweise des Marktes beschreiben und unter denen die Marktpreise entstehen und sich entwickeln. Im nächsten Kapitel wird die inventarbasierte Modellierung von Garman finanzmathematisch untersucht.

3 Inventar-Modelle

Garman modelliert in [3] zwei Basismärkte nach dem Marketmakerprinzip und nach dem Auktionsprinzip. In beiden Modellen sind die eingehenden Aufträge stochastische Prozesse.

Zunächst wird die Art der Aufträge modelliert.

3.1 Auftragsankunft

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und $(T_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen in $[0, \infty]$ so, dass

$$T_0 \equiv 0, \quad T_n < T_{n+1} \quad \text{auf} \quad \{T_n < \infty\}, \quad T_n = T_{n+1} = \dots \quad \text{auf} \quad \{T_n = \infty\}$$

gilt. Der zu dieser Folge korrespondierende stochastische *Zählprozess* $(N(t))_{t \geq 0}$ ist durch

$$N(t) = \sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n \leq t\}}, \quad t \geq 0,$$

gegeben.

Die Funktion $t \rightarrow N(t), t \geq 0$, ist eine rechtsseitig stetige Treppenfunktion mit Sprüngen um +1 in T_n , so dass $N_0 = 0$ ist. T_n ist der zufällige Zeitpunkt der Ankunft des n -ten Auftrags eines Marktteilnehmers und $N(t)$ die kumulative Anzahl der von diesem Marktteilnehmer abgegebenen Aufträge bis zum Zeitpunkt t .

Es seien die *Zwischenankunftszeiten* $T_{n+1} - T_n, n \in \mathbb{Z}^+$, unabhängig und identisch nach $Exp(\lambda), \lambda > 0$, verteilt. Dann bildet $(T_n)_{n \geq 1}$ einen *Erneuerungsprozess* oder auch *Punktprozess* und $N := (N(t))_{t \geq 0}$ einen *Poisson-Prozess* mit Intensität λ .

Das elementare Erneuerungstheorem (11.5.7 in [14]) besagt, dass $\frac{\mathbb{E}(N(t))}{t} \rightarrow \frac{1}{\mathbb{E}(T_1 - T_0)}$ gilt, d.h. die mittlere Anzahl der Auftragsankünfte pro Zeiteinheit konvergiert gegen λ , die auch die *Auftragsankunftsrate* genannt wird.

Weiter seien $M \in \mathbb{N}$ Kunden auf einem Markt unabhängig voneinander aktiv. Dann gilt für die Gesamtzahl aller Aufträge bis zum Zeitpunkt t :

$$N(t) = \sum_{j=1}^M N_j(t), \quad t \geq 0,$$

wobei $N_j(t)$ die kumulative Anzahl der vom j -ten Kunden abgegebenen Aufträge im Intervall $[0, t]$ ist.

Das nächste Lemma zeigt, dass eine Überlagerung von Poisson-Prozessen wieder ein Poisson-Prozess ist.

Lemma 3.1 Seien $N_j := (N_j(t))_{t \geq 0}$ unabhängige Poisson-Prozesse zu den Parametern λ_j für $j = 1, 2, \dots, M$.

Dann gilt, dass $N = \sum_{j=1}^M N_j$ ein Poisson-Prozess zum Parameter $\lambda = \sum_{j=1}^M \lambda_j$ ist.

3 Inventar-Modelle

Beweis Für die Fourier-Transformierte von $N_j(t)$, $t \geq 0$, für $j = 1, \dots, M$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{isN_j(t)}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{isN_j(t)} \cdot \mathbb{1}_{\{N_j(t)=k\}}\right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{isk} \cdot \mathbb{1}_{\{N_j(t)=k\}}\right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} \mathbb{P}(N_j(t) = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} \frac{(\lambda_j t)^k}{k!} e^{-\lambda_j t} \\
 &= e^{-\lambda_j t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{is} \lambda_j t)^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda_j t} e^{(e^{is} \lambda_j t)} \\
 &= e^{\lambda_j t (e^{is} - 1)}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Für die Fourier-Transformierte von $N(t)$ für $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{isN(t)}] &= \mathbb{E}\left[e^{is \sum_{j=1}^M N_j(t)}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^M e^{isN_j(t)}\right] \\
 &\stackrel{N_j \text{ unabh.}}{=} \prod_{j=1}^M \mathbb{E}[e^{isN_j(t)}] \\
 &\stackrel{(3.1)}{=} \prod_{j=1}^M e^{\lambda_j t (e^{is} - 1)} \\
 &= e^{\sum_{j=1}^M \lambda_j t (e^{is} - 1)} \\
 &= e^{\lambda t (e^{is} - 1)}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Da die Zuwächse stationär sind, gilt für $u \leq t$:

$$\mathbb{E}[e^{is(N(t)-N(u))}] = \mathbb{E}[e^{is(N(t-u))}] \stackrel{(3.2)}{=} e^{\lambda(t-u)(e^{is}-1)}. \tag{3.3}$$

Es seien $s = (s_1, \dots, s_n)$ und $\bar{N} = ((N(t_1) - N(t_0)), (N(t_2) - N(t_1)), \dots, (N(t_n) - N(t_{n-1})))^t$ der Vektor der Zuwächse für endlich viele $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Zuwächse stochastisch unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[e^{i\langle s, \bar{N} \rangle}] &= \mathbb{E}\left[e^{i \sum_{k=1}^n s_k (N(t_k) - N(t_{k-1}))}\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{is_k (N(t_k) - N(t_{k-1}))}\right] \\
 &\stackrel{\text{unabh. Zuw.}}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{is_k (N(t_k) - N(t_{k-1}))}\right] \\
 &\stackrel{(3.3)}{=} \prod_{k=1}^n e^{\lambda(t_k - t_{k-1})(e^{is_k} - 1)} \\
 &= e^{\sum_{k=1}^n \lambda(t_k - t_{k-1})(e^{is_k} - 1)}.
 \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $[0, \infty)$ ist durch ihre Fourier-Transformierte und durch ihre endlich-dimensionalen Randverteilungen eindeutig bestimmt. \square

Oft werden zusätzliche Informationen zum Punkt T_n durch die Zufallsvariable Y_n modelliert. Es sei $(Y_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die unabhängig von $(N(t))_{t \geq 0}$ sind. Der Prozess $((T_n, Y_n))_{n \geq 1}$ heißt *markierter Punktprozess*.

Es bezeichne Y_{j_n} , $j = 1, \dots, M$ die Gütermenge des n -Auftrags durch den j -ten Marktteilnehmer, der zum Zeitpunkt T_{j_n} aufgegeben wurde. Dann ist $X_j := (X_j(t))_{t \geq 0}$ ein zusammengesetzter Poisson-Prozess, wobei

$$X_j(t) = \sum_{n=1}^{N_j(t)} Y_{j_n}, \quad t \geq 0,$$

die vom j -ten Marktteilnehmer individuelle Gütergesamtmenge bis zum Zeitpunkt t ist.

Garman nimmt an, dass die Nutzenfunktionen der Marktteilnehmer nur von den Mittelwertfunktionen des betrachteten stochastischen Prozesses abhängen. Mit der Wald'schen Gleichung ([14], 11.5.4) folgt:

$$\eta_j(t) := \mathbb{E}[X_j(t)] = \mathbb{E}[N_j(t)]\mathbb{E}[Y_{j_1}] = \lambda_j t \mathbb{E}Y_{j_1}, \quad t \geq 0,$$

$\eta_j(t)$ kann für $t = 1$ als die mittlere nachgefragte Gütermenge pro Zeiteinheit des j -ten Marktteilnehmers interpretiert werden.

Es sei ein Prozess $X := (X(t))_{t \geq 0}$ gegeben, wobei

$$X(t) = \sum_{j=1}^M X_j(t) = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(t)} Y_{j_n}, \quad t \geq 0, \quad (3.4)$$

die gesamtwirtschaftlich nachgefragte Gütermenge bis zum Zeitpunkt t ist.

Die Mittelwertfunktion von $X(t)$ ist die Summe der einzelnen Mittelwertfunktionen:

$$\eta(t) := \mathbb{E}[X(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^M X_j(t)\right] = \sum_{j=1}^M \mathbb{E}[X_j(t)] = \sum_{j=1}^M \eta_j(t) = \sum_{j=1}^M \lambda_j t \mathbb{E}Y_{j_1}, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

Für die Kovarianz von X folgt (siehe Anhang A, (A.1)):

$$\nu(t \wedge u) := \text{Cov}[X(t), X(u)] = \sum_{j=1}^M \lambda_j (t \wedge u) \mathbb{E}Y_{j_1}^2. \quad (3.6)$$

Die Poisson-Prozesse sind sogenannte Lévy-Prozesse.

Definition 3.2 Ein stochastischer Prozess $S := (S(t))_{t \geq 0}$ heißt Lévy-Prozess, wenn gilt:

- (i) Es gilt $S(0) = 0$ \mathbb{P} -f.s.
- (ii) Für alle $u, t \geq 0$, $u \leq t$ gilt $S(t) - S(u) \stackrel{\mathcal{L}}{=} S(t - u)$, d.h. S hat stationäre Zuwächse.
- (iii) Für alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ sind die Zuwächse $S(t_1) - S(t_0), S(t_2) - S(t_1), \dots, S(t_n) - S(t_{n-1})$ stochastisch unabhängig, d.h. S hat unabhängige Zuwächse.
- (iv) Für alle $\varepsilon > 0$, $u, t \geq 0$ gilt $\lim_{u \rightarrow t} \mathbb{P}(|S(t) - S(u)| > \varepsilon) = 0$, d.h. S ist stochastisch stetig.

3 Inventar-Modelle

Lemma 3.3 Seien $X_j := (X_j(t))_{t \geq 0}$ unabhängige zusammengesetzte Poisson-Prozesse zu den Parameter η_j für $j = 1, 2, \dots, M$.

Dann ist $X = \sum_{j=1}^M X_j$ zu dem Parameter $\eta = \sum_{j=1}^M \eta_j$ ein Lévy-Prozess.

Beweis Zu zeigen sind die Bedingungen aus der Definition 3.2.

Zu (i): Es gilt $X(0) = \sum_{j=1}^M X_j(0) = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(0)} Y_{j_n} = 0$ \mathbb{P} -f.s.

Zu (ii): Für $u \leq t$ folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X(t) - X(u) \geq x) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(t)} Y_{j_n} - \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(u)} Y_{j_n} \geq x\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^M \sum_{n=N_j(u)+1}^{N_j(t)} Y_{j_n} \geq x\right) \\
 &\stackrel{Y_j \text{ iid}}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(t)-N_j(u)} Y_{j_n} \geq x\right) \\
 &\stackrel{N_j \text{ hat stat. Zuw.}}{=} \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j(t-u)} Y_{j_n} \geq x\right) \\
 &= \mathbb{P}(X(t-u) \geq x).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $X(t) - X(u)$ und $X(t-u)$ die gleiche Verteilung besitzen und somit sind die Zuwächse von X stationär.

Zu (iii): Es seien die Zuwächse $X_j(t_1) - X_j(t_0), X_j(t_2) - X_j(t_1), \dots, X_j(t_k) - X_j(t_{k-1})$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$ gegeben. Es gilt für $x_1, \dots, x_k \geq 0$ und $j \in \{1, \dots, M\}$:

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{X_j(t_i) - X_j(t_{i-1}) \geq x_i\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\sum_{n=1}^{N_j(t_i)} Y_{j_n} - \sum_{n=1}^{N_j(t_{i-1})} Y_{j_n} \geq x_i\right\}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\sum_{n=N_j(t_{i-1})+1}^{N_j(t_i)} Y_{j_n} \geq x_i\right\}\right) \\
 &\stackrel{Y_j \text{ iid}}{=} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\sum_{n=1}^{N_j(t_i)-N_j(t_{i-1})} Y_{j_n} \geq x_i\right\}\right) \\
 &\stackrel{Y_j, N_j \text{ unab.}}{=} \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\sum_{n=1}^{m_i} Y_{j_n} \geq x_i\right\}\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k \{N_j(t_i) - N_j(t_{i-1}) = m_i\}\right) \\
 &\stackrel{N_j \text{ hat unab. Zuw.}}{=} \sum_{m_1, \dots, m_k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{m_i} Y_{j_n} \geq x_i\right) \mathbb{P}(N_j(t_i) - N_j(t_{i-1}) = m_i) \\
 &= \prod_{i=1}^k \sum_{m_i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{m_i} Y_{j_n} \geq x_i\right) \mathbb{P}(N_j(t_i) - N_j(t_{i-1}) = m_i)
 \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{N_j(t_i) - N_j(t_{i-1})} Y_{j_n} \geq x_i \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(\sum_{n=N_j(t_{i-1})+1}^{N_j(t_i)} Y_{j_n} \geq x_i \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(\sum_{n=1}^{N_j(t_i)} Y_{j_n} - \sum_{n=1}^{N_j(t_{i-1})} Y_{j_n} \geq x_i \right) \\
&= \prod_{i=1}^k \mathbb{P} \left(X_j(t_i) - X_j(t_{i-1}) \geq x_i \right)
\end{aligned}$$

Somit hat X_j , $j = 1, \dots, M$ unabhängige Zuwächse. Daher besitzt X als Summe unabhängiger Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen selbst unabhängige Zuwächse.

Zu (iv): Für alle $\varepsilon > 0$, $u, t \geq 0$ gilt $|X(t) - X(u)| > \varepsilon \Rightarrow |N_j(t) - N_j(u)| > 0$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, M\}$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X(t) - X(u)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=1}^M N_j(t) - \sum_{j=1}^M N_j(u) \right| > 0 \right) \\
&\leq \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^M |N_j(t) - N_j(u)| > 0 \right) \\
&\stackrel{\text{stat. Zuw.}}{=} \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^M |N_j(t-u)| > 0 \right) \\
&\stackrel{N_j \geq 0}{=} \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^M N_j(t-u) > 0 \right) \\
&= 1 - \mathbb{P} \left(\sum_{j=1}^M N_j(t-u) = 0 \right) \\
&\stackrel{N_j \text{ unabh.}}{=} 1 - \prod_{j=1}^M \mathbb{P}(N_j(t-u) = 0) \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda(t-u)} \frac{(\lambda(t-u))^0}{0!} \right)^M \\
&= 1 - \left(e^{-\lambda(t-u)} \right)^M \xrightarrow{u \rightarrow t} 0.
\end{aligned}$$

Somit ist X stochastisch stetig. □

Bemerkung 3.4 Sind $Y_{j_n} \equiv 1$ für alle $j = 1, \dots, M$, $n \in \mathbb{N}$ in (3.4), dann gilt $X(t) = N(t)$ für alle $t \geq 0$.

Ein Auftrag kann formal als $\phi_n = (p_n, Y_n)$ dargestellt werden, wobei p_n der Preis eines Gutes ist und Y_n seine angegebene Menge zum Zeitpunkt T_n ist. Die Mittelwertfunktion des Prozesses $X(t)$ kann auch eine Funktion $\eta(t, p)$ sein, die in Abhängigkeit vom Preis p variiert.

Es seien $X_a(t)$ und $X_b(t)$ die kumulierten Gütermengen der Kauf- und Verkaufsaufträge bis zum Zeitpunkt t . Die Abbildung 3.1 zeigt die augenblicklichen Nachfrage- und Angebotskurven in Abhängigkeit vom Preis.

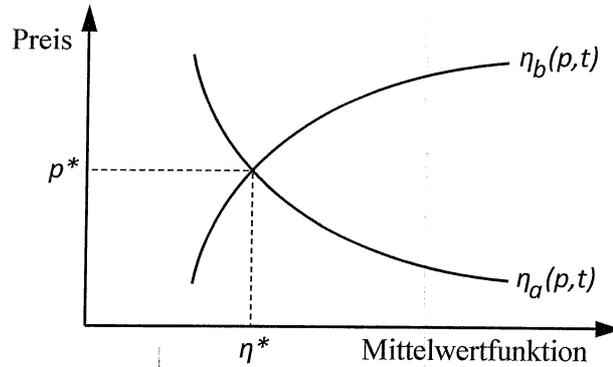


Abbildung 3.1: Stochastische kumulierte Angebots- und Nachfrageraten als Preisfunktion zum Zeitpunkt t [3].

Die auf dem Markt herrschenden Preise beeinflussen Nachfrage und Angebot, wie in der Abbildung 3.1 zu sehen ist. Der Punkt (p^*, η^*) stellt ein stochastisches Gleichgewicht dar, in dem Nachfrage und Angebot zusammenkommen.

3.2 Marketmaker-Markt

Garman betrachtet einen zentralen Markt mit einem monopolistischen Marketmaker, der anfangs verbindliche Quotes setzt und verpflichtet ist, sofort die eingehenden Aufträge auszuführen. Pro Auftrag wird eine Einheit des Wertpapiers abgewickelt. Zwischen dem Käufer und Verkäufer ist kein direkter Austausch möglich. Die Kauf- und Verkaufsaufträge sind unabhängige stochastische Prozesse. Es gibt keine Transaktionskosten für die Marktteilnehmer.

In diesem Modell wird der Zusammenhang der Quotes und des Inventars des Marketmakers untersucht, um seine optimale Strategie zu bestimmen. Ziel des Marketmaker ist, den erwarteten Gewinn pro Zeiteinheit unter der Vermeidung des Ausfalls auf einem unendlichen Horizont zu maximieren.

Zuerst wird der mögliche Ausfall behandelt, der auftreten kann, wenn das Inventar des Marketmakers ausläuft. Dazu seien

- (i) p_a und p_b die für Kauf- und Verkaufsaufträge gesetzten Ask- und Bid-Preise;
- (ii) $N_a := (N_a(t))_{t \geq 0}$ und $N_b := (N_b(t))_{t \geq 0}$ Poisson-Prozesse zu den Parametern $\lambda_a(p)$ und $\lambda_b(p)$, wobei $N_a(t)$ und $N_b(t)$ die bis zum Zeitpunkt t abgewickelten Kauf- und Verkaufsaufträge sind;
- (iii) $I_s(0)$ und $I_c(0)$ das Startinventar des Marketmakers an Wertpapier- und Bargeldeinheiten.

Somit sind

$$I_s(t) = I_s(0) + N_b(t) - N_a(t), \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

und

$$I_c(t) = I_c(0) + p_a N_a(t) - p_b N_b(t), \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

das Inventar des Marketmakers an Wertpapier- und Bargeldeinheiten bis zum Zeitpunkt t .

Weiter seien $R_k(t) = \mathbb{P}(I_s(t) = k)$ und $Q_k(t) = \mathbb{P}(I_c(t) = k)$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten, dass der Marketmaker k Wertpapiereinheiten und k Bargeldeinheiten zum Zeitpunkt $t \geq 0$ hält.

Die stochastischen Prozesse $I_s := (I_s(t))_{t \geq 0}$ und $I_c := (I_c(t))_{t \geq 0}$ sind Markov-Prozesse. Sie sind insbesondere spezielle *Geburts- und Todes-Prozesse*, weil nur Übergänge von $k - 1$ nach k und von $k + 1$ nach k möglich sind. Die Parameter $\lambda_b(p_b)$ und $\lambda_a(p_a)$ sind die Übergangsraten, mit denen der Marketmaker eine Wertpapiereinheit kauft bzw. verkauft. $p_a \lambda_a(p_a)$ bzw. $p_b \lambda_b(p_b)$ sind die Übergangsraten, mit denen der Marketmaker eine Bargeldeinheit bekommt bzw. verliert.

Garman gibt in [3] die Annäherung an die Ausfallwahrscheinlichkeiten für die beiden Prozesse, ohne Beweiswege und Verweise auf andere Quellen, wie folgt an:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_0(t) \approx \begin{cases} \left(\frac{\lambda_a(p_a)}{\lambda_b(p_b)} \right)^{I_s(0)}, & \text{falls } \lambda_a(p_a) < \lambda_b(p_b) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_0(t) \approx \begin{cases} \left(\frac{p_b \lambda_b(p_b)}{p_a \lambda_a(p_a)} \right)^{\frac{I_c(0)}{\bar{p}}}, & \text{falls } \lambda_a(p_a) < \lambda_b(p_b) \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.10)$$

wobei \bar{p} so gewählt ist, dass $p_b < \bar{p} < p_a$ gilt.

Er gibt jedoch an, dass die approximierten Lösungen sich aus der Analyse der angebotenen Markov-Prozesse in den folgenden Differentialgleichungen ergeben (Vgl. [3]).

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_k(t)}{\partial t} &= - (\lambda_a(p_a) + \lambda_b(p_b)) R_k(t) \\ &\quad + \lambda_b(p_b) R_{k-1}(t) + \lambda_a(p_a) R_{k+1}(t), \quad k \geq 1, t \geq 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_k(t)}{\partial t} &= - (p_a \lambda_a(p_a) + p_b \lambda_b(p_b)) Q_k(t) \\ &\quad + p_a \lambda_a(p_a) Q_{k-1}(t) + p_b \lambda_b(p_b) Q_{k+1}(t), \quad k \geq 1, t \geq 0, \end{aligned}$$

wobei die Startbedingungen $R_k(0) = 1$ und $Q_k(0) = 1$ lauten, wenn $k = I_s(0)$ und $k = I_c(0)$ sind, sonst sind sie 0.

In dieser Arbeit wird eine andere Technik zur Berechnung des Ruins angewandt. Dabei wird gezeigt, dass für die Ruinwahrscheinlichkeit des Inventar-Prozesses an Wertpapiereinheiten in (3.9) sogar Gleichheit gilt. Für die Ruinwahrscheinlichkeit des Inventar-Prozesses an Bargeldeinheiten wird die Normierung von $I_c(0)$ durch $\frac{I_c(0)}{\bar{p}}$ in (3.10) aufgegeben. Mithin weicht das Ergebnis vom Garmansresultat ab, wie später dem Abschnitt 3.2.6 zu entnehmen ist.

Bevor die Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmaker bestimmt werden, werden allgemeine Ergebnisse der Ruin-Theorie untersucht. Als Grundlage dienen vor allem [1] und [12].

3.2.1 Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines stochastischen Prozesses

Die Ausfallwahrscheinlichkeiten eines Prozesses lassen sich elegant mit Martingalen bestimmen. Dazu sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ gegeben.

3 Inventar-Modelle

Bei einem einseitigen Stopproblem wird ein nichtnegatives Martingal benötigt. Das nächste aus [1] entnommene Resultat liefert die einseitige Überschreitungswahrscheinlichkeit einer oberen Schranke $d > 0$ von einem stochastischen Prozess $(S(t))_{t \geq 0}$ unter gewissen Voraussetzungen.

Satz 3.5 ([1], II.1.1)

Es seien $(S(t))_{t \geq 0}$ ein Prozess mit $S(0) = 0$ und $\tau = \inf\{t \geq 0 : S(t) \geq d\}$ für $d > 0$, wobei

(i) $(e^{\gamma S(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal für $\gamma > 0$,

(ii) $S(t) \xrightarrow{f.s.} -\infty$ auf $\{\tau = \infty\}$ ist.

Dann gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit: $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \frac{e^{-\gamma d}}{\mathbb{E}[e^{\gamma(S(\tau)-d)} | \tau < \infty]}$.

Beweis ([1], II.1.1) Der Prozess $(e^{\gamma S(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist nach (i) ein Martingal. Da τ eine Stoppzeit ist, ist der gestoppte Prozess $(e^{\gamma S(\tau \wedge t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ auch ein Martingal.

Damit folgt

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[e^{\gamma S(0)}] = \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau \wedge 0)}] = \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau \wedge t)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau \wedge t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}] + \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau \wedge t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}] + \mathbb{E}[e^{\gamma S(t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}]. \end{aligned}$$

Da $\{\tau \leq t\}$ monoton wachsend gegen $\{\tau < \infty\}$ für $t \uparrow \infty$ konvergiert, lässt sich der Satz von der monotonen Konvergenz anwenden. Mithin folgt:

$$\mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}].$$

Da $0 \leq e^{\gamma S(t)} < e^{\gamma d} < \infty$ auf $\{\tau > t\}$ ist und $\{\tau > t\}$ monoton fallend gegen $\{\tau = \infty\}$ für $t \uparrow \infty$ konvergiert, lässt sich der Satz von der dominierten Konvergenz anwenden. Mithin und, da $e^{\gamma S(t)} \rightarrow 0$ auf $\{\tau = \infty\}$ nach (ii) gilt, folgt:

$$\mathbb{E}[e^{\gamma S(t)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[0 \cdot \mathbb{1}_{\{\tau = \infty\}}] = 0.$$

Daher folgt insgesamt für $t \uparrow \infty$:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}[e^{\gamma S(\tau)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}] + 0 \\ &= \mathbb{E}[e^{\gamma(S(\tau)-d+d)} \cdot \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}] \\ &= e^{\gamma d} \mathbb{E}[e^{\gamma(S(\tau)-d)} | \tau < \infty] \mathbb{P}(\tau < \infty) \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}(\tau < \infty) &= \frac{e^{-\gamma d}}{\mathbb{E}[e^{\gamma(S(\tau)-d)} | \tau < \infty]}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.6 *Unter den Bedingungen von Satz 3.5 gilt*

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\gamma d}.$$

Beweis Nach Voraussetzung gilt $\gamma > 0$ und auf $\{\tau < \infty\}$ ist $S(\tau) - d \geq 0$. Daher gilt $\mathbb{E}[e^{\gamma(S(\tau)-d)} | \tau < \infty]^{-1} \leq 1$ und mithin folgt die Behauptung. □

3 Inventar-Modelle

Für die Berechnung der einseitigen oberen Ausfallwahrscheinlichkeit eines stochastischen Prozesses $(S(t))_{t \geq 0}$ ist also ein Martingal der Form $(e^{\gamma S(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, $\gamma > 0$, von Interesse. Weiter liegt der Fokus auf Lévy-Prozessen. Die Prozesse in (3.7) und (3.8), deren Ausfallwahrscheinlichkeiten letztlich gesucht werden, sind nach Lemma 3.3 Lévy-Prozesse.

Lemma 3.7 (Vgl. [12], 10.3.1) *Es sei $(S(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess und $s \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{E}[e^{sS(t)}] < \infty$ gilt. Dann besitzt seine Laplace-Transformierte die folgende Darstellung:*

$$\mathbb{E}[e^{sS(t)}] = e^{t\kappa(s)}, \quad t \geq 0,$$

wobei $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Beweis Es sei $\mathbb{E}[e^{sS(t)}] =: f^s(t)$. Die Funktion $f^s(t)$ ist stetig in $t \geq 0$. Da $S(t)$ unabhängige und stationäre Zuwächse hat, gilt für $u, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f^s(t+u) &= \mathbb{E}[e^{sS(t+u)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{s(S(t+u)-S(u)+S(u))}] \\ &\stackrel{\text{unab.}}{\underset{\text{Zuwächse}}{=}} \mathbb{E}[e^{s(S(t+u)-S(u))}] \mathbb{E}[e^{sS(u)}] \\ &\stackrel{\text{stat.}}{\underset{\text{Zuwächse}}{=}} \mathbb{E}[e^{s(S(t+u-u))}] \mathbb{E}[e^{sS(u)}] \\ &= f^s(t) f^s(u). \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung der Gleichung $f^s(t+u) = f^s(t) f^s(u)$ ist $f^s(t) = e^{t\kappa(s)}$, $t \geq 0$. □

Lemma 3.8 *Es sei $(S(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess und $s \in \mathbb{R}$, so dass $\mathbb{E}[e^{sS(t)}] < \infty$ gilt. Dann ist der Prozess*

$$(e^{sS(t)-t\kappa(s)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$$

ein Martingal.

Beweis $(e^{sS(t)-t\kappa(s)})_{t \geq 0}$ ist ein \mathbb{F} adaptierter \mathcal{L}^1 -Prozess. Da $(S(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess ist, gilt für $0 \leq u \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{sS(t)-t\kappa(s)} | \mathcal{F}_u] &= e^{sS(u)-t\kappa(s)} \mathbb{E}[e^{s(S(t)-S(u))} | \mathcal{F}_u] \\ &\stackrel{\text{unab.}}{\underset{\text{Zuwächse}}{=}} e^{sS(u)-t\kappa(s)} \mathbb{E}[e^{s(S(t)-S(u))}] \\ &\stackrel{\text{stat.}}{\underset{\text{Zuwächse}}{=}} e^{sS(u)-t\kappa(s)} \mathbb{E}[e^{sS(t-u)}] \\ &= e^{sS(u)-t\kappa(s)} e^{(t-u)\kappa(s)} \\ &= e^{sS(u)-u\kappa(s)}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.9 *Es seien die Bedingungen in Lemma 3.8 erfüllt. Wenn $\gamma > 0$ existiert, so dass $\kappa(\gamma) = 0$ gilt, dann ist der Prozess*

$$(e^{\gamma S(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$$

ein Martingal.

Beweis Aus Lemma 3.8 folgt, dass $(e^{\gamma S(t)-t\kappa(\gamma)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = (e^{\gamma S(t)-t \cdot 0}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0} = (e^{\gamma S(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist. □

Als nächstes folgt eine Anwendung von Satz 3.5 auf ein bekanntes Beispiel eines Lévy-Prozesses.

Beispiel 3.10 (i) Sei $(B(t))_{t \geq 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung.

Für eine Zufallsvariable $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt $\mathbb{E}[e^{s\xi}] = e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$.

Da $B(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ gilt, folgt damit für die Laplace-Transformierte von $B(t)$, $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[e^{sB(t)}] = e^{t \frac{s^2}{2}}.$$

Somit ist $(e^{sB(t) - t \frac{s^2}{2}}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal (siehe auch [14], 15.5.6).

(ii) Es sei $(\tilde{B}(t))_{t \geq 0}$ ein Gauß-Prozess mit

$$\tilde{B}(t) = \mu t + \sigma B(t), \quad \mu < 0.$$

Es gilt für $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[e^{s\tilde{B}(t)}] = e^{t(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2})}.$$

Somit ist $(e^{s\tilde{B}(t) - t(\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2})}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal nach Lemma 3.8.

Da für $\gamma = -\frac{2\mu}{\sigma^2} > 0$ gilt

$$\kappa(\gamma) = -\mu \frac{2\mu}{\sigma^2} + \frac{\sigma^2 (-\frac{2\mu}{\sigma^2})^2}{2} = -2 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + \frac{4 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}{2} = 0,$$

folgt, dass $(e^{-\frac{2\mu}{\sigma^2} \tilde{B}(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal nach Korollar 3.9 ist.

Außerdem gilt $\tilde{B}(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$, da $\tilde{B}(t)$ einen negativen Drift μ hat. Sei jetzt $\tau = \inf\{t \geq 0 : \tilde{B}(t) \geq d\}$, $d > 0$. Da $\tilde{B}(t)$ stetig ist, gilt $\tilde{B}(\tau) - d = 0$ auf $\{\tau < \infty\}$ und folglich ist $\mathbb{E}[e^{\gamma(\tilde{B}(\tau) - d)} | \tau < \infty] = 1$.

Nach Satz 3.5 folgt für die Ausfallwahrscheinlichkeit daher $\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{\frac{2\mu}{\sigma^2} d}$, falls $\mu < 0$ (Vgl. [1], II.1.6).

Die in Satz 3.5 hergeleitete Formel für die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Prozesses ist wegen des bedingten Erwartungswertes im Allgemeinen schwer auszuwerten. Im nächsten Abschnitt wird eine Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeit unter einem exponentiellen Masswechsel hergeleitet. Die Untersuchungen sind an die Darlegungen von Asmussen in [1] angelehnt.

3.2.2 Die Ausfallwahrscheinlichkeit unter einem Masswechsel

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit einem vollständigen separablen metrischen Raum E und Pfaden im Skorohod Raum $D(\mathbb{R}_+)$, der mit einer natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und einer Borel σ -Algebra \mathcal{F} versehen ist.

Es ist ein Dichte-Prozess $(L_t)_{t \geq 0}$ gesucht, so dass $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A L_t d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{F}_t$ gilt.

Satz 3.11 (Vgl. [1], II.2.2) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ natürliche Filtration auf $D(\mathbb{R}_+)$, \mathcal{F} Borel σ -Algebra und \mathbb{P} Wahrscheinlichkeitsmass auf $(D(\mathbb{R}_+), \mathcal{F})$.

Wenn $(L_t)_{t \geq 0}$ ein nicht negativer Martingal bzgl. $((\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ ist, so dass $\mathbb{E}L_t = 1$ gilt, dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmass $\tilde{\mathbb{P}}$ auf \mathcal{F} , so dass

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A L_t d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{F}_t.$$

gilt.

Beweis (Vgl. [1], II.2.2) Definiere $\tilde{\mathbb{P}}$ durch $\tilde{\mathbb{P}}_t(A) = \int_A L_t d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{F}_t$.

Da $L_t \geq 0$ und $\mathbb{E}L_t = 1$ gilt, dann ist $\tilde{\mathbb{P}}_t$ ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $(D(\mathbb{R}_+), \mathcal{F}_t)$ und es gilt $\mathbb{E}L_t \leq K < \infty$.

Somit folgt (siehe [14], 11.3.3), dass ein $L_\infty \in \mathcal{L}^1(D_E, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existiert, wobei $L_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$ \mathbb{P} f.s. und im Mittel konvergiert, und $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ ist. Folglich ist das Martingal $(L_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ durch (L_∞, \mathcal{F}) abgeschlossen.

Sei $s < t, A \in \mathcal{F}_s$. Dann

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_t(A) &= \int_A L_t d\mathbb{P} \\ &= \int \mathbb{E}[L_t \mathbf{1}_{\{A\}} | \mathcal{F}_s] d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}[L_t | \mathcal{F}_s] d\mathbb{P} \\ &= \int_A L_s d\mathbb{P} \\ &= \tilde{\mathbb{P}}_s(A). \end{aligned}$$

Daher kann $(\tilde{\mathbb{P}}_t)_{t \geq 0}$ zum Wahrscheinlichkeitsmass auf (D_E, \mathcal{F}) fortgesetzt werden, so dass $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \tilde{\mathbb{P}}_t(A)$, $A \in \mathcal{F}_t$, gilt, was konstruktiv impliziert $\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A L_\infty d\mathbb{P}$. \square

Der nächste Satz liefert eine wichtige Anwendung.

Satz 3.12 (Vgl. [1], II.2.3) Sei $(L_t)_t$ und $\tilde{\mathbb{P}}$ wie in Satz 3.11. Wenn τ Stoppzeit ist und es gilt $G \in \mathcal{F}_\tau, G \subseteq \{\tau < \infty\}$, dann folgt

$$\mathbb{P}(G) = \int_G \frac{1}{L_\tau} d\tilde{\mathbb{P}}.$$

Beweis (Vgl. [1], II.2.3) Mit der Martingaleigenschaft gilt $\mathbb{E}[L_T | \mathcal{F}_\tau] = L_\tau$ auf $\{\tau \leq T\}$ für ein festes deterministisches $T < \infty$ (siehe [14], 11.2.1). Daher

$$\begin{aligned} \int_{G \cap \{\tau \leq T\}} \frac{1}{L_{\tau \wedge T}} d\tilde{\mathbb{P}} &= \int_{G \cap \{\tau \leq T\}} \frac{L_T}{L_{\tau \wedge T}} d\mathbb{P} \\ &= \int \mathbb{E} \left[\frac{L_T}{L_{\tau \wedge T}} \mathbf{1}_{\{G \cap \{\tau \leq T\}\}} | \mathcal{F}_{\tau \wedge T} \right] d\mathbb{P} \\ &= \int_{G \cap \{\tau \leq T\}} \frac{1}{L_{\tau \wedge T}} \mathbb{E}[L_T | \mathcal{F}_{\tau \wedge T}] d\mathbb{P} \\ &= \int_{G \cap \{\tau \leq T\}} \frac{1}{L_{\tau \wedge T}} L_{\tau \wedge T} d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{P}(G \cap \{\tau < T\}). \end{aligned}$$

Für $T \rightarrow \infty$ folgt $\tau \wedge T = \tau$, da $\tau < \infty$ ist, und $G \cap \{\tau \leq T\} \rightarrow G$, da $G \subseteq \{\tau < \infty\}$. Insgesamt folgt $\mathbb{P}(G \cap \{\tau < \infty\}) = \mathbb{P}(G)$. Die Behauptung folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz. \square

Der nächste Satz gibt eine äquivalente Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeit eines stochastischen Prozesses mit dem exponentiellen Mass an.

Satz 3.13 (Vgl. [1], II.2.4) *Unter der Bedingungen von Satz 3.5 gilt*

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma d} \tilde{\mathbb{E}}[e^{-\gamma(S(\tau)-d)}; \tau < \infty].$$

Beweis Sei $G = \{\tau < \infty\}$, dann ist $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(\tau < \infty)$ und da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < \infty) &= \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{1}{L_\tau}; \tau < \infty\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-\gamma S(\tau)}; \tau < \infty\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-\gamma d} e^{-\gamma(S(\tau)-d)}; \tau < \infty\right] \\ &= e^{-\gamma d} \tilde{\mathbb{E}}\left[e^{-\gamma(S(\tau)-d)}; \tau < \infty\right] \end{aligned}$$

gilt. \square

Das nächste Ziel ist die Anwendung des Masswechsels auf einen Prozess, der den Marketmaker-Prozess verallgemeinert. Im Folgenden wird der Prozess definiert und seine Eigenschaften angegeben, in dem Abschnitt darauf werden er und seine Eigenschaften unter Masswechsel untersucht. Insbesondere wird die Ausfallwahrscheinlichkeit dieses Prozesses in unendliche Zeit unter einem optimalen Masswechsel dargestellt. Zudem lassen sich Schranken für den Ruin und ein Monte-Carlo-Algorithmus zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit unter diesem Mass herleiten.

Als Orientierung für die Untersuchungen des Prozesses dienten teilweise die Quellen [1], [12] und [4]. Jedoch betrachten die Autoren dort den Prozess $\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \beta t$ für alle $t \geq 0$, der als Verlustprozess in der Versicherungsmathematik bekannt ist.

3.2.3 Verallgemeinerung des Modells von Garman

Um auf die einseitigen Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmakers zu schließen, wird zunächst ein allgemeinerer Prozess $X := (X(t))_{t \geq 0}$ untersucht, nämlich

$$X(t) := \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i, \quad t \geq 0, \quad (3.11)$$

und

- $A := (A(t))_{t \geq 0}$ und $B := (B(t))_{t \geq 0}$ unabhängige Poisson-Prozesse mit Parameter $\alpha > 0$ und $\beta > 0$,
- $Y := (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger positiver nach F_Y ($F_Y(t) = 0$ für $t \leq 0$) identisch verteilter Zufallsvariablen, die unabhängig von A ist,
- $Z := (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger positiver nach F_Z ($F_Z(t) = 0$ für $t \leq 0$) identisch verteilter Zufallsvariablen, die unabhängig von B ist,

sind.

Im folgenden Lemma wird die Konvergenz des Prozesses in (3.11) untersucht.

Lemma 3.14 *Es gilt*

- (i) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ f.s., falls $\alpha \mathbb{E}Y_1 < \beta \mathbb{E}Z_1$,
- (ii) $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ f.s., falls $\alpha \mathbb{E}Y_1 > \beta \mathbb{E}Z_1$,
- (iii) $\liminf_{t \rightarrow \infty} X(t) = -\infty$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} X(t) = +\infty$ falls $\alpha \mathbb{E}Y_1 = \beta \mathbb{E}Z_1$.

Beweis Nach dem elementaren Erneuerungstheorem gilt (Vgl. [14], 11.5.7):

$$\frac{A(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha.$$

Nach dem Starken Gesetz der Großen Zahlen gilt (Vgl. [14], 3.3.1):

$$\frac{1}{A(t)} \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}Y_1.$$

Mithin folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} X(t) &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i \right] \\ &= \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i \right] - \frac{1}{t} \left[\sum_{i=1}^{B(t)} Z_i \right] \\ &= \frac{A(t)}{t} \frac{1}{A(t)} \left[\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i \right] - \frac{B(t)}{t} \frac{1}{B(t)} \left[\sum_{i=1}^{B(t)} Z_i \right] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha \mathbb{E}Y_1 - \beta \mathbb{E}Z_1. \end{aligned}$$

Mithin gilt (i) bzw. (ii), falls $\alpha \mathbb{E}Y_1 < \beta \mathbb{E}Z_1$ bzw. $\alpha \mathbb{E}Y_1 > \beta \mathbb{E}Z_1$ ist.

Teil (iii) folgt aus einem allgemeinen Random-Walk Resultat, da $\liminf_{n \rightarrow \infty} X(nh) = -\infty$ f.s. und $\limsup_{n \rightarrow \infty} X(nh) = \infty$ f.s. für $n \in \mathbb{N}$ und $h > 0$ gilt (Vgl. [1], III.1.2). \square

Die Konvergenzergebnisse finden eine Anwendung bei der Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit, wie im folgenden Korollar zu sehen ist.

Korollar 3.15 *Sei ein Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ durch (3.11) und $\tau = \{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$, $d > 0$ gegeben. Es gilt*

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) \begin{cases} < 1, & \text{für alle } d > 0, & \text{falls } \mathbb{E}X(1) < 0 \\ = 1 & & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis (Vgl. [1], III.1.4) Es folgt unmittelbar aus (i) in Lemma 3.14, dass $X(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ f.s. gilt, falls $\mathbb{E}X(1) < 0$ ist. Angenommen, dass dabei $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > 0) = 1$ gilt, d.h. $X(t)$ müsste mindestens einmal die Schranke 0 überquert haben. Da aber $X(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ f.s. gilt, überquert der Prozess f.s. die Schranke 0 wieder nach unten. Durch Wiederholung des Arguments und Induktion ergibt dies einen Widerspruch zu $X(t) \rightarrow -\infty$. Weiter gilt $\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > d) \leq \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > 0)$. Somit folgt $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > d) < 1$.

Aus (ii) und (iii) in Lemma 3.14, folgt, dass $\sup_{t \geq 0} X(t) = \infty$ für $\mathbb{E}X(1) \geq 0$ ist und daher gilt $\mathbb{P}(\tau < \infty) = \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} X(t) > d) = 1$. \square

3 Inventar-Modelle

Lemma 3.16 Sei $s \in \mathbb{R}$, so dass $L_Y(s) < \infty$ und $L_Z(s) < \infty$ gilt, wobei $L_Y(s)$ und $L_Z(s)$ die Laplace-Transformierten von Y_1 und Z_1 sind.

Der Prozess $(e^{sX(t)-t\kappa(s)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal, wobei

$$\kappa(s) = \alpha(L_Y(s) - 1) + \beta(L_Z(-s) - 1) \quad (3.12)$$

gilt.

Beweis Der Prozess X zu dem Parameter $\alpha\mathbb{E}(Y_1) - \beta\mathbb{E}(Z_1)$ ist nach Lemma 3.3 ein Lévy-Prozess.

Für die Laplace-Transformierte von $\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i$, $t \geq 0$, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{s \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{s \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i} \cdot \mathbb{1}_{\{A(t)=k\}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{s \sum_{i=1}^k Y_i} \cdot \mathbb{1}_{\{A(t)=k\}}\right] \\ &\stackrel{A, Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{s \sum_{i=1}^k Y_i}\right] \mathbb{P}(A(t) = k) \\ &\stackrel{(Y_i)_i \text{ unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^k \mathbb{E}\left[e^{s Y_i}\right] \mathbb{P}(A(t) = k) \\ &\stackrel{(Y_i)_i \text{ iden.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (L_Y(s))^k \frac{(\alpha t)^k}{k!} e^{-\alpha t} \\ &= e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t L_Y(s))^k}{k!} \\ &= e^{-\alpha t} e^{\alpha t L_Y(s)} \\ &= e^{\alpha t (L_Y(s) - 1)} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Für die Laplace-Transformierte von $X(t)$ für $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{sX(t)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{s(\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i)}\right] \\ &\stackrel{A, B \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}\left[e^{s \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i}\right] \mathbb{E}\left[e^{-s \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i}\right] \\ &\stackrel{(3.13)}{=} e^{\alpha t (L_Y(s) - 1)} e^{\beta t (L_Z(-s) - 1)} \\ &= e^{t(\alpha(L_Y(s) - 1) + \beta(L_Z(-s) - 1))}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Unter diesen Voraussetzungen und mit Lemma 3.8 folgt direkt die Behauptung. □

Das nächste Lemma liefert eine Aussage über die Lösungen der Gleichung $\kappa(s) = 0$, unter anderem über die Existenz der Lösung $\gamma > 0$, wobei $\kappa(s)$ durch (3.12) gegeben ist.

Lemma 3.17 Es seien ein Prozess X durch (3.11) mit $\mathbb{E}X(1) < 0$, die Bedingungen von Lemma 3.16 und $\kappa(s)$ durch (3.12) gegeben. Dann besitzt die Gleichung

$$\kappa(s) = 0, \quad s \in \mathbb{R},$$

eine eindeutige Lösung $\gamma > 0$.

Beweis Es gilt für die erste und zweite Ableitung von $\kappa(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\kappa(s) &= \alpha \frac{\partial}{\partial s}L_Y(s) + \beta \frac{\partial}{\partial s}L_Z(-s) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}[e^{sY_1}] + \beta \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}[e^{-sZ_1}] \\ &= \alpha \mathbb{E}[Y_1 e^{sY_1}] + \beta \mathbb{E}[-Z_1 e^{-sZ_1}] \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}\kappa(s) &= \alpha \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}[Y_1 e^{sY_1}] + \beta \frac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}[-Z_1 e^{-sZ_1}] \\ &= \alpha \mathbb{E}[Y_1^2 e^{sY_1}] + \beta \mathbb{E}[Z_1^2 e^{-sZ_1}] > 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\kappa(s)$ strikt konvex ist. Somit besitzt $\kappa(s)$ höchstens zwei Nullstellen.

Eine Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$ ist 0, da

$$\alpha(L_Y(0) - 1) + \beta(L_Z(0) - 1) = \alpha(\mathbb{E}[e^{0 \cdot Y_1}] - 1) + \beta(\mathbb{E}[e^{0 \cdot Z_1}] - 1) = \alpha(1 - 1) + \beta(1 - 1) = 0.$$

gilt. Da $\mathbb{E}X(1) < 0 \Leftrightarrow \alpha \mathbb{E}Y_1 < \beta \mathbb{E}Z_1$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}\kappa(0) &= \alpha \mathbb{E}[Y_1 e^{0 \cdot Y_1}] + \beta \mathbb{E}[-Z_1 e^{0 \cdot Z_1}] \\ &= \alpha \mathbb{E}[Y_1] + \beta \mathbb{E}[-Z_1] < 0.\end{aligned}$$

Daher hat $\kappa(s)$ negative Steigung in Null. Also ist $\gamma > 0$, wenn γ existiert, so dass $\kappa(\gamma) = 0$ gilt.

Aufgrund $\mathbb{P}(Y_1 > 0) > 0$ und $\mathbb{P}(Z_1 > 0) > 0$ gilt $L_Y(s) \rightarrow \infty$ und $L_Z(-s) \rightarrow 0$ für $s \rightarrow \infty$. Dann folgt $\kappa(s) \rightarrow \infty$ für $s \rightarrow \infty$. Folglich existiert $\gamma > 0$, so dass $\kappa(\gamma) = 0$. \square

Im Allgemeinen ist es schwer γ zu berechnen. Die folgenden Beispiele geben $\gamma > 0$ als Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$ unter konkreter Verteilungen der Folgen Y und Z einmal in expliziter Darstellung und einmal als numerische Lösung an.

Beispiel 3.18 Es sei X durch (3.11) gegeben.

(i) Seien $Y_i = Z_i = 1$ für $i = 1, 2, \dots$, dann gilt:

$$L_Y(s) = \mathbb{E}[e^{sY_1}] = e^s$$

und

$$L_Z(-s) = \mathbb{E}[e^{-sZ_1}] = e^{-s}.$$

Mit (3.12) folgt somit $\kappa(s) = \alpha(e^s - 1) + \beta(e^{-s} - 1)$.

Für $s = \ln(\frac{\beta}{\alpha}) \neq 0$ gilt

$$\alpha\left(e^{\ln(\frac{\beta}{\alpha})} - 1\right) + \beta\left(e^{-\ln(\frac{\beta}{\alpha})} - 1\right) = \alpha\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) + \beta\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right) = \beta - \alpha + \alpha - \beta = 0.$$

Es folgt $\gamma = \ln(\frac{\beta}{\alpha})$ und somit ist $\left(e^{\ln(\frac{\beta}{\alpha})X(t)}, \mathcal{F}_t\right)_{t \geq 0}$ nach Korollar 3.9 ein Martingal.

(ii) Seien $Y_i = y$, $Z_i = z$ für $i = 1, 2, \dots$, $y, z > 0$ dann gilt:

$$L_Y(s) = \mathbb{E}[e^{sY_1}] = e^{sy}$$

und

$$L_Z(-s) = \mathbb{E}[e^{-sZ_1}] = e^{-sz}.$$

Mit (3.12) folgt somit $\kappa(s) = \alpha(e^{sy} - 1) + \beta(e^{-sz} - 1)$.

3 Inventar-Modelle

Die Lösung der Gleichung $\gamma > 0$ kann in diesem Fall nicht explizit angegeben werden. Die Abbildung 3.2 widerspiegelt eine Simulation der Funktion $\kappa(s)$ mit konkreten beliebig gewählten Parametern α, β, y, z und ihre Nullstellen. Die Nullstelle $\gamma > 0$ wurde numerisch angenähert (siehe Anhang B).

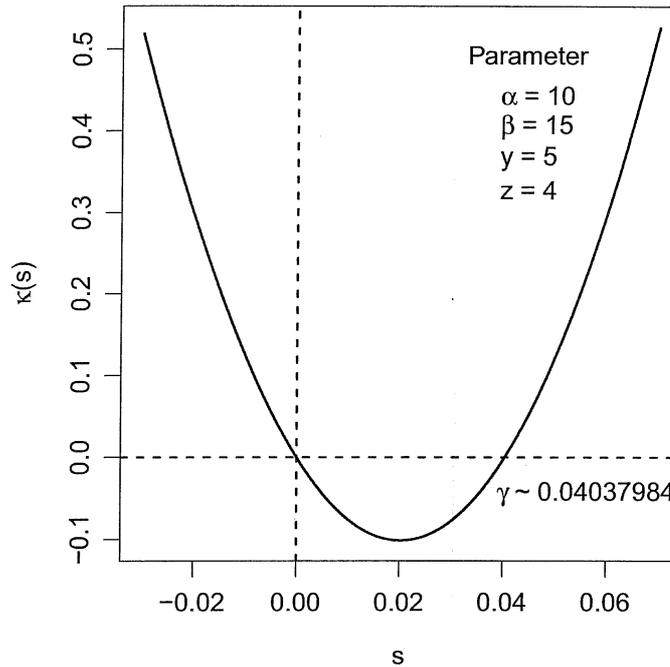


Abbildung 3.2: Simulation der Funktion $\kappa(s)$ und die Nullstelle $\gamma > 0$.

Das nächste Lemma liefert eine Approximation für $\gamma > 0$ als Lösung der Gleichung $\alpha(L_Y(s) - 1) + \beta(L_Z(-s) - 1) = 0$.

Lemma 3.19 *Es sei $\kappa(s)$ durch 3.12 gegeben, wobei $\alpha\mathbb{E}Y_1 < \beta\mathbb{E}Z_1$ gilt.*

Wenn $\alpha\mathbb{E}Y_1 \rightarrow \beta\mathbb{E}Z_1$ gilt, dann ist

$$\gamma \sim \frac{2(\beta\mathbb{E}Z_1 - \alpha\mathbb{E}Y_1)}{\alpha\mathbb{E}Y_1^2 + \beta\mathbb{E}Z_1^2}$$

die Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$.

Beweis Sei $s \in \mathbb{R}$ und $0 < \xi \in \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $L_\xi(s) < \infty$, dann gilt mit der Taylor-Reihen-Entwicklung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{s\xi}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s\xi)^n}{n!}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{(s\xi)^n}{n!}\right] \\ &\stackrel{\text{dom.}}{\underset{\text{Konver.}}{=}} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^m \frac{(s\xi)^n}{n!}\right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{s^n \mathbb{E}[\xi^n]}{n!} \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n \mathbb{E}[\xi]^n}{n!}.$$

Der Satz von der dominierten Konvergenz lässt sich anwenden, da

$$\left| \sum_{n=0}^m \frac{(s\xi)^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=0}^m \frac{|s\xi|^n}{n!} = e^{|s\xi|} \leq e^{s\xi} + e^{-s\xi} =: M$$

mit $\mathbb{E}M = \mathbb{E}[e^{s\xi} + e^{-s\xi}] = L_\xi(s) + L_\xi(-s) < \infty$ gilt.

Nach Korollar 3.15 gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\tau < \infty) < 1$, falls $\alpha\mathbb{E}Y_1 < \beta\mathbb{E}Z_1$ gilt oder $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$.

Falls $\alpha\mathbb{E}Y_1 \rightarrow \beta\mathbb{E}Z_1$ gilt, folgt somit $\mathbb{P}(\tau < \infty) \rightarrow 1$. Da nach Satz 3.6 $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-\gamma d}$, $d > 0$, gilt, folgt insgesamt $\gamma \rightarrow 0$.

Daher gilt mit der Taylor-Approximation:

$$L_Y(\gamma) = \mathbb{E}[e^{\gamma Y_1}] \approx 1 + \gamma\mathbb{E}Y_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Y_1^2}{2},$$

$$L_Z(-\gamma) = \mathbb{E}[e^{\gamma Z_1}] \approx 1 - \gamma\mathbb{E}Z_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Z_1^2}{2}.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma) &= \alpha(L_Y(\gamma) - 1) + \beta(L_Z(-\gamma) - 1) \\ &\approx \alpha \left(1 + \gamma\mathbb{E}Y_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Y_1^2}{2} - 1 \right) + \beta \left(1 - \gamma\mathbb{E}Z_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Z_1^2}{2} - 1 \right) \\ &= \alpha \left(\gamma\mathbb{E}Y_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Y_1^2}{2} \right) + \beta \left(-\gamma\mathbb{E}Z_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Z_1^2}{2} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \left(\gamma\mathbb{E}Y_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Y_1^2}{2} \right) + \beta \left(-\gamma\mathbb{E}Z_1 + \frac{\gamma^2\mathbb{E}Z_1^2}{2} \right) &\approx 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha\mathbb{E}Y_1 - \beta\mathbb{E}Z_1)\gamma + \left(\frac{\alpha\mathbb{E}Y_1^2}{2} + \frac{\beta\mathbb{E}Z_1^2}{2} \right) \gamma^2 &\approx 0 \\ \Leftrightarrow \gamma \left((\alpha\mathbb{E}Y_1 - \beta\mathbb{E}Z_1) + \left(\frac{\alpha\mathbb{E}Y_1^2}{2} + \frac{\beta\mathbb{E}Z_1^2}{2} \right) \gamma \right) &\approx 0 \\ \Leftrightarrow \gamma &\approx \frac{2(\beta\mathbb{E}Z_1 - \alpha\mathbb{E}Y_1)}{\alpha\mathbb{E}Y_1^2 + \beta\mathbb{E}Z_1^2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.20 (Fortsetzung von Bsp. 3.18, (ii))

Nach Lemma 3.19 folgt für $\alpha = 10$, $\beta = 15$, $y = 5$, $z = 4$:

$$\gamma \sim \frac{2(\beta z - \alpha y)}{\alpha y^2 + \beta z^2} = \frac{2(\beta z - \alpha y)}{\alpha y^2 + \beta z^2} = \frac{2(15 \cdot 4 - 10 \cdot 5)}{10 \cdot 5^2 + 15 \cdot 4^2} = \frac{2}{49} \approx 0,04081633.$$

α	β	y	z	αy	βz	γ numerisch	γ nach Lemma 3.19
10	15	2	4	20	60	0.3910689	0.2857143
7	15	4	4	28	60	0.1905368	0.1818182
8	15	3	4	32	60	0.2676804	0.2307692
10	15	4	4	40	60	0.1013665	0.1
10	15	5	4	50	60	0.04037984	0,04081633
11	15	5	4	55	60	0.01930467	0.01941748
11,5	15	5	4	57,5	60	0.009450394	0.009478673
11,8	15	5	4	59	60	0.003734	0.003738318

Tabelle 3.1: Approximation von γ für verschiedene Parameter

In der Tabelle 3.1 ist γ für verschiedene beliebig gewählte Parameter einmal mit einer numerischen Methode angenähert und einmal nach Lemma 3.19 approximiert worden. Es ist zu beobachten, dass je näher αy an βz liegt, desto exakter ist die nach Lemma 3.19 approximierte Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$.

Im nächsten Abschnitt werden die Eigenschaften des verallgemeinerten Prozesses und seine Ausfallwahrscheinlichkeit unter Masswechsel hergeleitet, die einfacher zu handhaben ist. Insbesondere ist der Masswechsel für die Simulation des Prozesses nützlich.

3.2.4 Die Eigenschaften des verallgemeinerten Marketmaker-Prozesses unter Masswechsel

Der im Abschnitt 3.2.2 eingeführte exponentielle Masswechsel erhält die Struktur eines stochastischen Prozesses und ist ein leistungsfähiges Werkzeug bei der Untersuchung seiner Ausfallwahrscheinlichkeit (siehe [12]). Unter anderem lässt sich mit dessen Hilfe die Ausfallwahrscheinlichkeit in der stochastischen Simulation effizient approximieren (Vgl. [4]).

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\Omega \subseteq D(\mathbb{R}_+)$, ein kanonischer Wahrscheinlichkeitsraum mit der natürlichen Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Prozess in (3.11) und $\kappa(s)$ in (3.12).

Sei $\theta \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{E}(e^{\theta X(t)}) < \infty$. Der Prozess $(e^{\theta X(t) - t\kappa(\theta)})_{t \geq 0}$, $\theta \in \mathbb{R}$ ist nach Lemma 3.8 ein Martingal unter \mathbb{P} . Folglich ist $L_t^\theta := e^{\theta X(t) - t\kappa(\theta)}$ ein Dichte-Prozess unter dem im Satz 3.11 definierten Masses \mathbb{P}^θ auf (Ω, \mathcal{F}) , so dass

$$\frac{d\mathbb{P}^\theta}{d\mathbb{P} |_{\mathcal{F}_t}} = L_t^\theta, \quad t \geq 0, \quad (3.15)$$

gilt.

Der folgende Lemma liefert die Eigenschaften des Prozesses $(X(t))_{t \geq 0}$ unter \mathbb{P}^θ .

Lemma 3.21 *Es sei $\theta \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{E}(e^{\theta X(t)}) < \infty$ und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^\theta)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei X ein Prozess in (3.11) und $\kappa(s)$ in (3.12), nämlich*

$$X(t) := \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i, \quad t \geq 0.$$

und

$$\kappa(s) = \alpha(L_Y(s) - 1) + \beta(L_Z(-s) - 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

3 Inventar-Modelle

Dann ist X bezüglich des Masses \mathbb{P}^θ in (3.15) wieder ein Lévy-Prozess mit den Parametern:

$$\kappa^\theta(s) = \kappa(s + \theta) - \kappa(\theta)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha^\theta &= \alpha L_Y(\theta), & L_Y^\theta(s) &= \frac{L_Y(s + \theta)}{L_Y(\theta)}, \\ \beta^\theta &= \beta L_Z(-\theta), & L_Z^\theta(-s) &= \frac{L_Z(-s - \theta)}{L_Z(-\theta)}. \end{aligned}$$

Beweis

Nach Lemma 3.16 gilt für die Laplace-Transformierte von $X(t)$ für $t \geq 0$

$$\mathbb{E}[e^{sX(t)}] = e^{t\kappa(s)}.$$

Unter der Anwendung von Satz 3.11 für $0 \leq t \leq T$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\theta[e^{sX(t)}] &= \int e^{sX(t)} d\mathbb{P}^\theta \\ &= \int e^{sX(t)} e^{\theta X(T) - T\kappa(\theta)} d\mathbb{P} \\ &\stackrel{\text{stat. Zuw.}}{=} \int e^{sX(t) + \theta(X(t) + X(T-t)) - T\kappa(\theta)} d\mathbb{P} \\ &= \int e^{(s+\theta)X(t) + \theta X(T-t) - T\kappa(\theta)} d\mathbb{P} \\ &\stackrel{\text{unab. Zuw.}}{=} e^{t\kappa(s+\theta) + (T-t)\kappa(\theta) - T\kappa(\theta)} \\ &= e^{t\kappa(s+\theta) - t\kappa(\theta)} \\ &= e^{t(\kappa(s+\theta) - \kappa(\theta))}. \end{aligned}$$

Es folgt $\kappa^\theta(s) = \kappa(s + \theta) - \kappa(\theta)$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \kappa^\theta(s) &= \alpha(L_Y(s + \theta) - 1) + \beta(L_Z(-s - \theta) - 1) - \alpha(L_Y(\theta) - 1) - \beta(L_Z(-\theta) - 1) \\ &= \alpha(L_Y(s + \theta) - 1 - L_Y(\theta) + 1) + \beta(L_Z(-s - \theta) - 1 - L_Z(-\theta) + 1) \\ &= \alpha L_Y(\theta) \left(\frac{L_Y(s + \theta)}{L_Y(\theta)} - 1 \right) + \beta L_Z(-\theta) \left(\frac{L_Z(-s - \theta)}{L_Z(-\theta)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich der Funktionen $\kappa^\theta(s)$ und $\kappa(s)$ liefert die Behauptung.

Für $0 \leq u \leq t$ gilt mit der Bayes-Formel

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\theta[e^{s(X(t) - X(u))} | \mathcal{F}_u] &= \mathbb{E} \left[\frac{L_t^\theta}{L_u^\theta} e^{s(X(t) - X(u))} | \mathcal{F}_u \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{e^{\theta X(t) - t\kappa(\theta)}}{e^{\theta X(u) - u\kappa(\theta)}} e^{s(X(t) - X(u))} | \mathcal{F}_u \right] \\ &= e^{-t\kappa(\theta)} e^{u\kappa(\theta)} \mathbb{E} \left[e^{\theta(X(t) - X(u))} e^{s(X(t) - X(u))} | \mathcal{F}_u \right] \\ &= e^{(u-t)\kappa(\theta)} \mathbb{E} \left[e^{(\theta+s)(X(t-u))} | \mathcal{F}_u \right] \\ &= e^{(u-t)\kappa(\theta)} \mathbb{E} \left[e^{(\theta+s)(X(t-u))} \right] \\ &= e^{(u-t)\kappa(\theta)} e^{(t-u)\kappa(\theta+s)} \\ &= e^{(t-u)(\kappa(\theta+s) - \kappa(\theta))}. \end{aligned}$$

Folglich sind die Zuwächse unabhängig und stationär unter \mathbb{P}^θ . □

Bemerkung 3.22 Die Ausdrücke

$$L_Y^\theta(s) = \frac{L_Y(s + \theta)}{L_Y(\theta)} \quad \text{und} \quad L_Z^\theta(-s) = \frac{L_Z(-s - \theta)}{L_Z(-\theta)}$$

implizieren

$$F_Y^\theta(x) = \frac{1}{L_Y(\theta)} \int_0^x e^{\theta y} dF_Y(y) \quad \text{und} \quad F_Z^\theta(x) = \frac{1}{L_Z(-\theta)} \int_0^x e^{-\theta z} dF_Z(z).$$

Der folgende Satz liefert die Ausfallwahrscheinlichkeit von X unter \mathbb{P}^θ .

Satz 3.23 *Es seien X durch (3.11) mit $\mathbb{E}X(1) < 0$, $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$, $d > 0$, und $\gamma > 0$ so, dass $\kappa(\gamma) = 0$ gilt, gegeben.*

Dann gilt

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma d} \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau) - d)}].$$

Beweis Da $\mathbb{E}X(1) = \alpha \mathbb{E}Y_1 - \beta \mathbb{E}Z_1 < 0$ gilt nach Lemma 3.14 $X(t) \rightarrow -\infty$.

Mit Lemma 3.21 und Bemerkung 3.22 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\gamma X(1) &= \alpha^\gamma \mathbb{E}^\gamma Y_1 - \beta^\gamma \mathbb{E}^\gamma Z_1 \\ &= \alpha L_Y(\gamma) \int y dF_Y^\gamma(y) - \beta L_Z(-\gamma) \int z dF_Z^\gamma(z) \\ &= \alpha L_Y(\gamma) \frac{1}{L_Y(\gamma)} \int y e^{\gamma y} dF_Y(y) - \beta L_Z(-\gamma) \frac{1}{L_Z(-\gamma)} \int z e^{-\gamma z} dF_Z(z) \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial \gamma} L_Y(\gamma) + \beta \frac{\partial}{\partial \gamma} L_Z(-\gamma) \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \kappa(\gamma) > 0, \end{aligned}$$

da $\gamma > 0$ die Nullstelle von $\kappa(s) = 0$ ist und $\kappa(s)$ an der Stelle γ positive Steigung hat. Daher gilt nach Lemma 3.14 $X(t) \rightarrow +\infty$ unter P^γ . Dann tritt der Ruin f.s. ein und somit folgt $\mathbb{P}^\gamma(\tau < \infty) = 1$ und mit Satz 3.13 die Behauptung. □

Im allgemeinen Fall ist $\mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau) - d)}]$ nicht leicht auszuwerten. Da $\mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau) - d)}] \leq 1$ gilt, kann die Ausfallwahrscheinlichkeit durch die Ungleichung $\mathbb{P}^\gamma(\tau < \infty) \leq e^{-\gamma d}$ nach oben beschränkt werden.

Diese Schranke kann jedoch noch verfeinert und eine untere Schranke angegeben werden. Die Vorgehensweise im Beweis des nächsten Lemmas stützt sich an [4], 6.11, wobei dort der Prozess $\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - t$ betrachtet wurde.

Lemma 3.24 *Unter den Bedingungen von Satz 3.23 gilt:*

$$\inf_{x \geq 0} g(x) e^{-\gamma d} \leq \mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \sup_{x \geq 0} g(x) e^{-\gamma d}, \quad \text{für alle } d > 0,$$

wobei $g(x) = \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)}$ ist.

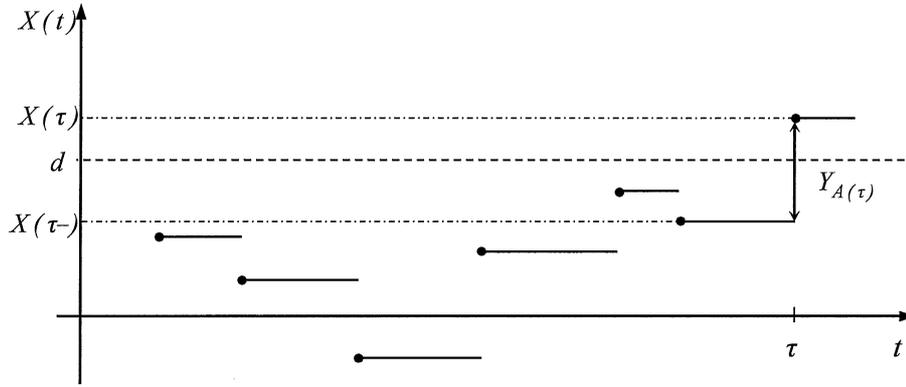


Abbildung 3.3: Ein Pfad des Prozesses $(X(t))_{t \geq 0}$ auf $\{\tau < \infty\}$

Beweis Der Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ erreicht zum Zeitpunkt $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$ die Schranke $d > 0$, indem er einen Sprung der Größe $Y_{A(\tau)}$ nach oben macht. $d - X(\tau-) > 0$ ist die Reserve unmittelbar vor dem Ruin und $X(\tau) - d \geq 0$ ist der Überschuss nach dem Ruin, wobei $X(\tau-) = \lim_{u \nearrow \tau} X(u)$ ist. Die Abbildung 3.3 veranschaulicht dies.

Dabei gilt $Y_{A(\tau)} \geq d - X(\tau-)$ und $B(\tau) = B(\tau-)$.

Mithin folgt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \leq y, d - X(\tau-) = x) \\
 = & \mathbb{P}^\gamma \left(\sum_{i=1}^{A(\tau)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(\tau)} Z_i - d \leq y, d - \sum_{i=1}^{A(\tau-)} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x \right) \\
 = & \mathbb{P}^\gamma \left(Y_{A(\tau)} + \sum_{i=1}^{A(\tau-)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i - d \leq y, d - \sum_{i=1}^{A(\tau-)} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x \right) \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(Y_{A(\tau)} + \sum_{i=1}^{A(\tau-)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i - d \leq y, d - \sum_{i=1}^{A(\tau-)} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, A(\tau) = k \right) \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(Y_k + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i - \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i - d \leq y, d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, Y_k \geq x \right) \\
 = & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(Y_k - x \leq y, d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, Y_k \geq x \right) \\
 \stackrel{\text{unab.}}{=} & \mathbb{P}^\gamma(Y_k - x \leq y, Y_k \geq x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x \right) \\
 \stackrel{Y_i \text{ iden.}}{=} & \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y, Y_1 \geq x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x \right) \\
 = & \frac{\mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y, Y_1 \geq x)}{\mathbb{P}^\gamma(Y_1 \geq x)} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x \right) \mathbb{P}^\gamma(Y_1 \geq x) \\
 \stackrel{Y_i \text{ iden.}}{\stackrel{\text{unab.}}{=}} & \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, Y_k \geq x \right)
 \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(Y_k - x \geq 0, d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, A(\tau) = k \right) \\
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \\
&\quad \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}^\gamma \left(Y_k - d + \sum_{i=1}^{k-1} Y_i - \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i \geq 0, d - \sum_{i=1}^{k-1} Y_i + \sum_{i=1}^{B(\tau-)} Z_i = x, A(\tau) = k \right) \\
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \geq 0, d - X(\tau-) = x).
\end{aligned}$$

Weiter gilt für die bedingte Verteilung des Überschusses

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \leq y | d - X(\tau-) = x) \\
&= \frac{\mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \geq y, d - X(\tau-) = x)}{\mathbb{P}^\gamma(d - X(\tau-) = x)} \\
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \frac{\mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \geq 0, d - X(\tau-) = x)}{\mathbb{P}^\gamma(d - X(\tau-) = x)} \\
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x) \underbrace{\mathbb{P}^\gamma(X(\tau) - d \geq 0 | d - X(\tau-) = x)}_{=1 \text{ f.s.}} \\
&= \mathbb{P}^\gamma(Y_1 - x \leq y | Y_1 \geq x). \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Bezeichne nun $H^\gamma(x) = \mathbb{P}^\gamma(d - X(\tau-) \leq x)$, $\forall x \geq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\gamma \left[e^{-\gamma(X(\tau)-d)} \right] &= \mathbb{E}^\gamma \left[\mathbb{E}^\gamma \left[e^{-\gamma(X(\tau)-d)} | d - X(\tau-) \right] \right] \\
&= \mathbb{E}^\gamma \left[\mathbb{E}^\gamma \left[e^{-\gamma(X(\tau)-d)} | d - X(\tau-) = x \right] H^\gamma(dx) \right] \\
&\stackrel{(3.16)}{=} \mathbb{E}^\gamma \left[\mathbb{E}^\gamma \left[e^{-\gamma(Y_1-x)} | Y_1 \geq x \right] H^\gamma(dx) \right] \\
&= \mathbb{E}^\gamma \left[e^{\gamma x} \frac{\int_{\{Y_1 \geq x\}} e^{-\gamma Y_1} d\mathbb{P}^\gamma}{\int_{\{Y_1 \geq x\}} d\mathbb{P}^\gamma} H^\gamma(dx) \right] \\
&= \mathbb{E}^\gamma \left[e^{\gamma x} \frac{\int_{\{y \geq x\}} e^{-\gamma y} F_Y^\gamma(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} F_Y^\gamma(dy)} H^\gamma(dx) \right] \\
&\stackrel{\text{Bem. 3.22}}{=} \mathbb{E}^\gamma \left[e^{\gamma x} \frac{\frac{1}{L_Y(\gamma)} \int_{\{y \geq x\}} e^{-\gamma y} e^{\gamma y} F_Y(dy)}{\frac{1}{L_Y(\gamma)} \int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma y} F_Y(dy)} H^\gamma(dx) \right] \\
&= \mathbb{E}^\gamma \left[e^{\gamma x} \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma y} F_Y(dy)} H^\gamma(dx) \right].
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\inf_{x \geq 0} \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)} \leq \mathbb{E}^\gamma \left[e^{-\gamma(X(\tau)-d)} \right] \leq \sup_{x \geq 0} \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)}$$

und somit folgt mit Satz 3.23 die Behauptung. \square

Beispiel 3.25 Sei $F_Y = \Gamma(2, \alpha)$ mit der Dichte $f(x) = \alpha^2 x e^{-\alpha x}$, $x, \alpha > 0$. Mit Verwendung

3 Inventar-Modelle

von

$$\begin{aligned}
 \int_x^\infty \alpha^2 y e^{(\gamma-\alpha)y} dy &= \alpha^2 \left(y \frac{e^{(\gamma-\alpha)y}}{\gamma-\alpha} \Big|_x^\infty - \frac{1}{\gamma-\alpha} \int_x^\infty e^{(\gamma-\alpha)y} dy \right) \\
 &= \alpha^2 \left(-x \frac{e^{(\gamma-\alpha)x}}{\gamma-\alpha} + \frac{1}{\gamma-\alpha} \frac{e^{(\gamma-\alpha)x}}{\gamma-\alpha} \right) \\
 &= \alpha^2 \left(\frac{e^{(\gamma-\alpha)x} - x e^{(\gamma-\alpha)x} (\gamma-\alpha)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)} \right) \\
 &= \frac{\alpha^2 e^{(\gamma-\alpha)x} (1 - x(\gamma-\alpha))}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)}
 \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)} \\
 &= \frac{\int_x^\infty f(y) dy}{\int_x^\infty e^{\gamma(y-x)} f(y) dy} \\
 &= \frac{\int_x^\infty \alpha^2 y e^{-\alpha y} dy}{\int_x^\infty e^{\gamma(y-x)} \alpha^2 y e^{-\alpha y} dy} \\
 &= \frac{e^{\gamma x} \int_x^\infty \alpha^2 y e^{-\alpha y} dy}{\int_x^\infty \alpha^2 y e^{(\gamma-\alpha)y} dy} \\
 &= \frac{e^{\gamma x} e^{-\alpha x} (1 + \alpha x) (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 e^{(\gamma-\alpha)x} (1 - x(\gamma - \alpha))} \\
 &= \frac{(1 + \alpha x) (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 (1 - x(\gamma - \alpha))}.
 \end{aligned}$$

Mithin folgt

$$\inf_{x \geq 0} g(x) = \inf_{x \geq 0} \frac{(1 + \alpha x) (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 (1 - x(\gamma - \alpha))} = \frac{(1 + \alpha \cdot 0) (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 (1 - 0 \cdot (\gamma - \alpha))} = \frac{(\alpha - \gamma)^2}{\alpha^2}$$

und

$$\sup_{x \geq 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + \alpha x) (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 (1 - x(\gamma - \alpha))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{x} + \alpha) x (\gamma - \alpha)^2}{\alpha^2 (\frac{1}{x} - (\gamma - \alpha)) x} = \frac{\alpha (\gamma - \alpha)^2}{-\alpha^2 (\gamma - \alpha)} = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}.$$

Daher folgt

$$\frac{(\alpha - \gamma)^2}{\alpha^2} \leq \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}] \leq \frac{\alpha - \gamma}{\alpha}.$$

Im nächsten Satz werden die bisher hergeleiteten Ergebnisse angewandt, um die Ruinwahrscheinlichkeit des Prozesses X unter konkreten Verteilungen der Folgen Y und Z zu berechnen.

Satz 3.26 *Es sei jetzt der Prozess X in (3.11) mit exponentiell verteilten Folgen Y und Z zu den Parametern $\mu > 0$ und $\nu > 0$ gegeben und sei $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$, $d > 0$.*

Dann gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit des Prozesses X :

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \begin{cases} \frac{\alpha(\nu+\mu)}{\mu(\beta+\alpha)} \exp\left(-\frac{\mu\beta-\nu\alpha}{\beta+\alpha}d\right), & \text{falls } \alpha\nu < \beta\mu \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis Es gilt:

$$L_Y(s) = \int_0^\infty e^{sx} \mu e^{-\mu x} dx = \mu \int_0^\infty e^{(s-\mu)x} dx = \frac{\mu}{\mu-s}, \quad s < \mu,$$

und

$$L_Z(-s) = \int_0^\infty e^{-sx} \nu e^{-\nu x} dx = \nu \int_0^\infty e^{(-s-\nu)x} dx = \frac{\nu}{\nu+s}, \quad -s < \nu.$$

Damit folgt $\kappa(s) = \alpha\left(\frac{\mu}{\mu-s} - 1\right) + \beta\left(\frac{\nu}{\nu+s} - 1\right)$ mit (3.12). Es gilt für $s \neq 0$

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mu\alpha}{\mu-s} - \alpha + \frac{\nu\beta}{\nu+s} - \beta &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu\alpha(\nu+s) - \alpha(\mu-s)(\nu+s) + \nu\beta(\mu-s) - \beta(\mu-s)(\nu+s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu\alpha\nu + \mu\alpha s - \alpha\mu\nu - \alpha\mu s + \alpha\nu s + \alpha s^2 + \nu\beta\mu - \nu\beta s - \beta\mu\nu - \beta\mu s + \beta\nu s + \beta s^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha\nu s + \alpha s^2 - \beta\mu s + \beta s^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\beta + \alpha)s^2 + (\alpha\nu - \beta\mu)s &= 0 \\ \Leftrightarrow s((\beta + \alpha)s + (\alpha\nu - \beta\mu)) &= 0 \\ \Leftrightarrow s = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\beta + \alpha}. \end{aligned}$$

Somit ist $\left(e^{\frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\beta + \alpha} X(t)}, \mathcal{F}_t\right)_{t \geq 0}$ nach Korollar 3.9 ein Martingal mit $\gamma = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\beta + \alpha}$.

Es gilt nach Lemma 3.14 $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ für $\alpha\mathbb{E}Y_1 < \beta\mathbb{E}Z_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\mu} < \frac{\beta}{\nu} \Leftrightarrow \alpha\nu < \beta\mu$.

Da $\bar{F}_Y(x) = e^{-\mu x}$ gilt, folgt für $g(x)$ in Lemma 3.24

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\bar{F}_Y(x)}{\int_x^\infty e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)} \\ &= \frac{e^{-\mu x}}{\int_x^\infty e^{\gamma(y-x)} \mu e^{-\mu y} dy} \\ &= \frac{e^{(\gamma-\mu)x}}{\int_x^\infty \mu e^{(\gamma-\mu)y} dy} \\ &= \frac{e^{(\gamma-\mu)x}}{\frac{-\mu}{\gamma-\mu} e^{(\gamma-\mu)x}} \\ &= \frac{\mu - \gamma}{\mu} \\ &= \frac{\mu - \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\beta + \alpha}}{\mu} \\ &= \frac{-\beta\mu + \alpha\nu + \mu(\beta + \alpha)}{\mu(\beta + \alpha)} \\ &= \frac{\alpha(\nu + \mu)}{\mu(\beta + \alpha)}. \end{aligned}$$

Da die untere und die obere Schranke zusammenfallen, ist der Erwartungswert exakt, nämlich $\mathbb{E}\gamma[e^{-\gamma(X(\tau)-d)}] = \frac{\alpha(\nu + \mu)}{\mu(\beta + \alpha)}$. Nach Satz 3.23 und Korollar 3.15 folgt mithin die Ruin-Wahrscheinlichkeit von X , wie angegeben. \square

3.2.5 Monte-Carlo-Simulation unter Masswechsel zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Nach Satz 3.23 gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit des Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$ in (3.11)

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma d} \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}]. \quad (3.17)$$

Der Ausdruck $\mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}]$ kann nach Satz 3.26 exakt ausgewertet werden, wenn die Folgen $(Y_i)_i$ und $(Z_i)_i$ exponentiell verteilt sind. Jedoch, wie schon erwähnt, ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Neben den Schranken in Lemma 3.24 lässt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem exponentiellen Mass \mathbb{P}^γ , wobei $\gamma > 0$ die Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$ ist, wie folgt effizient simulieren (Vgl. [4], Abschnitt 6.3.3, wobei dort die Formel (3.19) nicht korrekt angegeben ist, vermutlich durch einen Tippfehler).

Algorithmus 3.27

- Simulation der n Pfade des Prozesses $(X_t)_{t \geq 0}$ unter dem Mass \mathbb{P}^γ bis zum Ruinzeitpunkt.
- Berechnung des Überschusses zum Ruinzeitpunkt $X^i(\tau_i) - d$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei $\tau_i = \inf\{t \geq 0 : X^i(t) \geq d\}$ ist.
- Berechnung des Schätzers vom Überschuss zum Ruinzeitpunkt durch

$$\Theta := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X^i(\tau_i) - d). \quad (3.18)$$

- Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit durch

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma d} \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma \Theta}] = e^{-\gamma(d+\Theta)}. \quad (3.19)$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit des Prozesses wird im unendlichen Zeithorizont betrachtet. Bei der Simulation der Pfade unter dem Mass \mathbb{P}^γ tritt der Ruin nach Satz 3.23 f.s. ein und somit terminiert der Algorithmus.

Der einzige Zufall in (3.17) liegt in dem Überschuss. Wenn d groß gewählt ist, ist der Überschuss vergleichsweise klein. Der relative Fehler ist somit in Anbetracht von (3.19) beschränkt und folglich ist diese Methode effizient [4].

Im folgenden Beispiel wird der Algorithmus zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit für eine Verteilung, für die keine exakte Darstellung des Ruins existiert, unter konkreten willkürlich gewählten Parametern angewandt.

Beispiel 3.28 Seien $Y_i = y$, $Z_i = z$ für $i = 1, 2, \dots$, $y, z > 0$ in Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ mit $\alpha = 11$, $\beta = 15$, $y = 5$, $z = 4$. Es gilt $\gamma = 0.01941748$ nach Tabelle 3.1 und $L_Y(\gamma) = e^{\gamma y}$, $L_Z(-\gamma) = e^{-\gamma z}$ nach Beispiel 3.18, (ii).

Daher folgt nach Lemma 3.21 für die Parameter des Prozesses X unter dem Mass \mathbb{P}^γ :

$$\begin{aligned} \alpha^\gamma &= \alpha L_Y(\gamma) = 11 \cdot e^{0.01941748 \cdot 5} = 12.12152, \\ \beta^\gamma &= \beta L_Z(-\gamma) = 15 \cdot e^{-0.01941748 \cdot 4} = 13.87905. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 3.22 folgt für die Verteilungsfunktionen der Folgen Y und Z unter dem Mass \mathbb{P}^γ :

$$\begin{aligned} F_Y^\gamma(x) &= \frac{1}{L_Y(\gamma)} \int_0^x e^{\gamma y} dF_Y(y) = \frac{1}{e^{\gamma y}} \int_0^x e^{\gamma y} dF_Y(y) = F_Y(x), \\ F_Z^\gamma(x) &= \frac{1}{L_Z(-\gamma)} \int_0^x e^{-\gamma z} dF_Z(z) = \frac{1}{e^{-\gamma z}} \int_0^x e^{-\gamma z} dF_Z(y) = F_Z(x). \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

n	τ	$X(\tau) - d$	n	τ	$X(\tau) - d$
1	0.0694	0	51	0.0784	1
2	2.3245	4	52	0.1278	0
3	0.7123	2	53	0.5107	2
4	0.135	1	54	0.079	0
5	5.4526	1	55	0.4023	2
6	2.8978	0	56	0.0252	0
7	0.4317	2	57	2.4446	2
8	2.4121	1	58	1.6939	0
9	0.108	0	59	2.3253	0
10	0.5389	1	60	0.1799	1
11	0.3841	1	61	0.0857	0
12	0.9422	0	62	0.3945	3
13	0.5212	0	63	0.5717	4
14	0.0983	0	64	1.1006	1
15	7.2032	3	65	0.3822	4
16	0.7201	2	66	1.3449	1
17	0.246	0	67	20.4935	3
18	0.375	3	68	0.1459	1
19	0.2272	2	69	6.5792	2
20	0.878	1	70	0.0534	0
21	9.3174	0	71	0.1392	0
22	3.3967	1	72	1.1555	4
23	4.2829	0	73	2.3032	0
24	5.158	4	74	2.1135	3
25	1.9539	0	75	10.5867	4
26	0.0569	0	76	1.255	2
27	1.6898	1	77	0.0912	0
28	0.7558	0	78	0.8501	1
29	1.3292	0	79	0.3528	4
30	0.0653	1	80	0.1381	3
31	0.0428	0	81	2.014	3
32	0.4048	0	82	0.0794	1
33	0.0844	0	83	1.2382	2
34	0.162	1	84	0.0389	0
35	0.0549	0	85	1.4445	3
36	0.0249	0	86	5.4035	4
37	13.0465	0	87	0.5135	3
38	6.0321	3	88	0.0178	0
39	0.0259	0	89	9.2392	0
40	2.6555	2	90	0.5754	2
41	0.2282	0	91	0.056	0
42	5.2484	1	92	4.3471	1
43	0.2699	0	93	6.0798	0
44	0.1682	0	94	0.242	3
45	0.2699	3	95	0.6242	3
46	0.1206	1	96	0.3238	3
47	0.1526	0	97	0.0126	0
48	0.1232	1	98	11.5626	0
49	0.3864	0	99	0.2115	1
50	0.1874	2	100	0.3889	4

Tabelle 3.2: Simulation der Ruinzeitpunkte und der Überschüsse von n Pfaden des Prozesses X unter Masswechsel

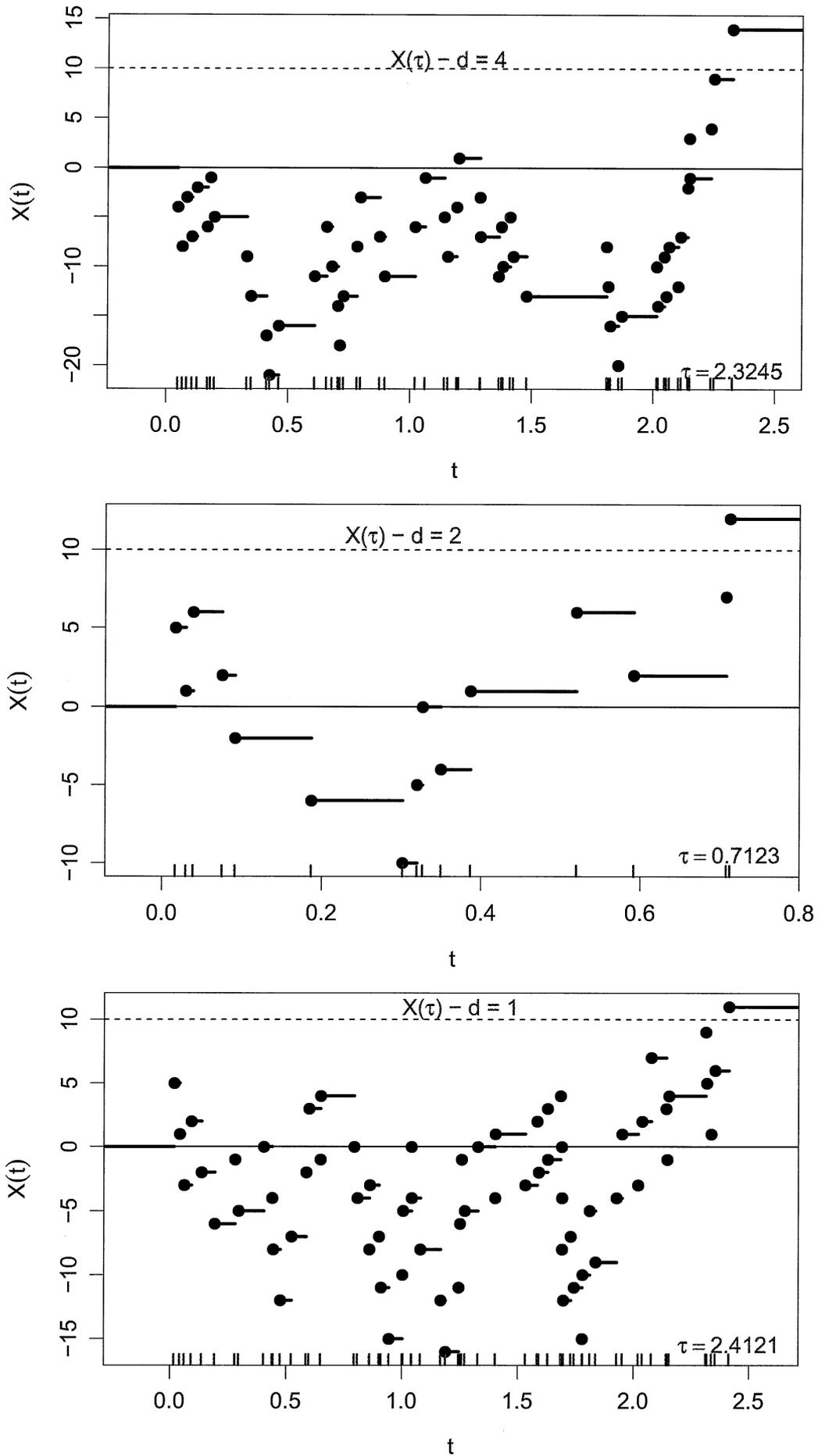


Abbildung 3.4: Plote der Pfade des Prozesses X unter Masswechsel im konstanten Fall

3 Inventar-Modelle

Nach dem Masswechsel erhält der Prozess nach Satz 3.23 einen positiven Drift, nämlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\gamma X(1) &= \alpha^\gamma \cdot y - \beta^\gamma \cdot z \\ &= 12.12152348 \cdot 5 - 13.8790467 \cdot 4 \\ &= 60.6076174 - 55.5161868 \\ &= 5.0914306 > 0,\end{aligned}$$

so dass bei der Simulation der Pfade des Prozesses Ruin f.s. eintritt.

In der Tabelle 3.2 sind die Ruinzeitpunkte und die Überschüsse zu den Ruinzeitpunkten von $n = 100$ simulierten Pfaden des Prozesses X unter \mathbb{P}^γ gegeben, wobei $d = 10$ gewählt wurde. Die Daten sind auf die vierte Nachkommastelle gerundet.

Mithin folgt $\Theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X^i(\tau_i) - d) = 1.26$ und $\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma(d+\Theta)} = 0.8036103$ und für den geschätzten Ruinzeitpunkt $\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i = 1.86789$.

In der Abbildung 3.4 sind beispielhaft ein zweiter, ein dritter und ein achter simulierter Pfad des Prozesses unter dem Mass \mathbb{P}^γ dargestellt. Auf der Zeitachse sind die Ankunftszeitpunkte der Folgen Y und Z mit roten und blauen Markierungen jeweils hervorgehoben. Zugleich ist der Ausfallzeitpunkt und der Ruinüberschuss jedes Pfades gegeben, die auch aus der Tabelle 3.2 entnommen werden können.

Die Daten in der Tabelle 3.2 und der Plot des Prozesses in der Abbildung 3.4 wurden mit dem im Anhang C gegebenen Code erzeugt.

Hier noch ein Beispiel mit einigen Simulationsdaten für verschiedene beliebige Parameter mit exponentiell verteilten Folgen Y und Z .

Beispiel 3.29 Seien $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$, $Z_i \sim \text{Exp}(\nu)$ für $i = 1, 2, \dots$ im Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$.

Es gilt $\gamma = \frac{\beta\mu - \alpha\nu}{\beta + \alpha}$ und $L_Y(\gamma) = \frac{\mu}{\mu - \gamma}$, $L_Z(-\gamma) = \frac{\nu}{\nu + \gamma}$ nach Satz 3.26.

Für die Parameter α^γ und β^γ gilt wie oben $\alpha^\gamma = \alpha L_Y(\gamma)$ und $\beta^\gamma = \beta L_Z(-\gamma)$ nach Lemma 3.21 und nach Bemerkung 3.22 folgt für die Verteilungsfunktionen der Folgen Y und Z unter dem Mass \mathbb{P}^γ :

$$\begin{aligned}\bar{F}_Y^\gamma(x) &= \frac{1}{L_Y(\gamma)} \int_x^\infty e^{\gamma y} dF_Y(y) = \frac{\mu - \gamma}{\mu} \int_x^\infty e^{\gamma y} \mu e^{-\mu y} dy \\ &= (\mu - \gamma) \int_x^\infty e^{(\gamma - \mu)y} dy = e^{-(\mu - \gamma)x}, \\ \bar{F}_Z^\gamma(x) &= \frac{1}{L_Z(-\gamma)} \int_x^\infty e^{-\gamma z} dF_Z(z) = \frac{\nu + \gamma}{\nu} \int_x^\infty e^{-\gamma z} \nu e^{-\nu z} dz \\ &= (\nu + \gamma) \int_x^\infty e^{-(\nu + \gamma)z} dz = e^{-(\nu + \gamma)x}.\end{aligned}$$

Somit gilt $\mu^\gamma = \mu - \gamma$ und $\nu^\gamma = \nu + \gamma$.

Unter den Parameter α^γ , β^γ , μ^γ , ν^γ werden Pfade des Prozesses X simuliert und die auf vierte Nachkommastelle gerundeten Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle 3.3 zu finden. Die Implementierung dazu befindet sich in Anhang C.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\tau < \infty)$ wurde nach Satz 3.26 exakt ausgewertet und die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{\mathbb{P}}(\tau < \infty)$ mit Algorithmus 3.27 geschätzt. Es ist zu beobachten, dass die simulierten Daten effizient sind und die Ausfallwahrscheinlichkeit konvergiert gegen Eins, falls $\alpha\nu$ gegen $\beta\mu$ konvergiert.

In der Abbildung 3.5 ist exemplarisch ein Pfad des Prozesses X mit den Parameter $\alpha = 9$, $\beta = 10$, $\mu = 7$, $\nu = 7$, $d = 8$ und ein Pfad mit den Parameter $\alpha = 9$, $\beta = 10$, $\mu = 1$, $\nu = 1$, $d = 4$ dargestellt.

3 Inventar-Modelle

α	β	μ	ν	α^γ	β^γ	μ^γ	ν^γ	$\mathbb{P}(\tau < \infty)$	$\overline{\mathbb{P}}(\tau < \infty)$
10	15	5	4	13.8889	11.1111	3.6	5.4	9.8e-06	9.2e-06
10	12	5	4	12.2222	9.7778	4.0909	4.9091	5.68e-04	5.63e-04
10	15	5	6	11.3636	13.6364	4.4	6.6	0.0072	0.0071
12	11	6.5	5	13	10	6	5.5	0.0169	0.0168
9	10	7	7	9.5	9.5	6.6316	7.3684	0.0497	0.0496
9	11	7	8	9.3333	10.6667	6.75	8.25	0.1305	0.1305
10	15	5	7	10.4167	14.5833	4.8	7.2	0.1938	0.1938
10	15	4.9	7	10.2941	14.7059	4.76	7.14	0.3169	0.3166
10.5	15	5	7	10.625	14.875	4.9412	7.0588	0.6173	0.6173

Tabelle 3.3: Vergleich der Ausfallwahrscheinlichkeiten unter verschiedenen Parametern für $n = 1000$ und $d = 8$

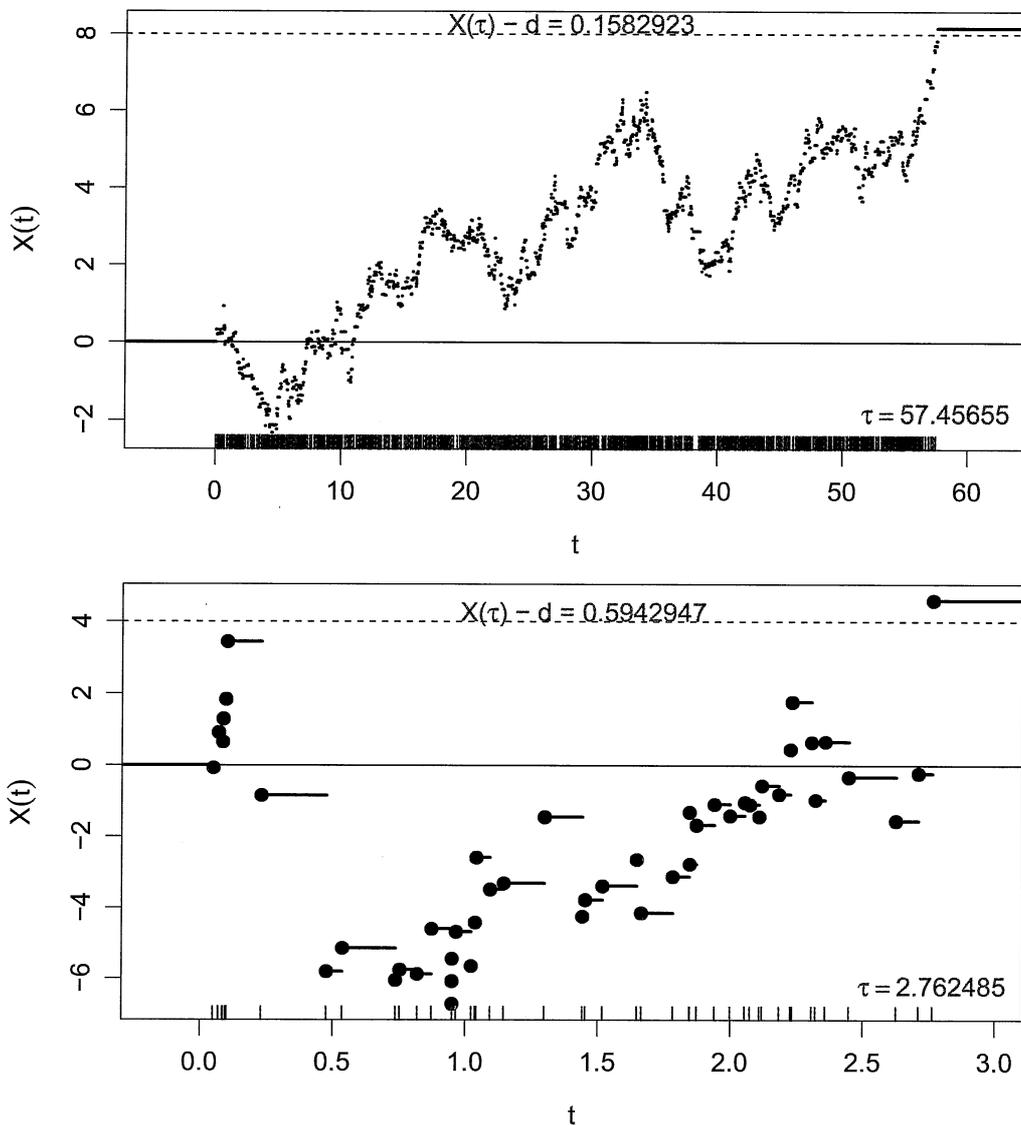


Abbildung 3.5: Plotte der Pfade des Prozesses X unter Masswechsel im exponentiellen Fall

Anhand der hergeleiteten Ergebnisse werden als nächstes die Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmakers berechnet.

3.2.6 Die Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmakers

Der Marketmaker hält $I_s(t)$ Wertpapiereinheiten und $I_c(t)$ Bargeldeinheiten zum Zeitpunkt t , die durch die Gleichungen (3.7) und (3.8) gegeben sind. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hält der Marketmaker nach Voraussetzung $I_s(0) > 0$ Wertpapiereinheiten und $I_c(0) > 0$ Bargeldeinheiten.

Der Parameter $\lambda_a(p_a)$ kann als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, mit der der Marketmaker einen Kaufauftrag des Kunden ausführt bzw. ein Wertpapier $(\phi_i = (p_a, Y_i))$, wobei $Y_i = 1$ verkauft. $\lambda_b(p_b)$ ist dementsprechend die Wahrscheinlichkeit, mit der der Marketmaker ein Wertpapier kauft.

Der Parameter $p_a \lambda_a(p_a)$ bzw. $p_b \lambda_b(p_b)$ kann als die Wahrscheinlichkeit interpretiert werden, mit der der Marketmaker eine Bargeldeinheit bekommt bzw. verliert.

Der folgende Satz liefert die Wahrscheinlichkeiten des Ausfalls bezüglich des Wertpapierinventars $\lim_{t \rightarrow \infty} R_0(t) = \mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} I_s(t) \leq 0)$ und des Bargeldinventars $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_0(t) = \mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} I_c(t) \leq 0)$ in unendlicher Zeit.

Die Ergebnisse werden mit Hilfe der in vorherigen Abschnitten ausgearbeiteten Technik hergeleitet und, wie schon erwähnt, weichen sie von den durch Garman genannten Ergebnissen in (3.9) und (3.10) ab.

Satz 3.30 *Es gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_0(t) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda_a(p_a)}{\lambda_b(p_b)} \right)^{I_s(0)}, & \text{falls } \lambda_a(p_a) < \lambda_b(p_b) \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.20)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_0(t) \approx \begin{cases} C e^{-\gamma I_c(0)}, & \text{falls } p_b \lambda_b(p_b) < p_a \lambda_a(p_a) \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.21)$$

wobei $e^{-\gamma p_b} \leq C \leq 1$ und $\gamma \approx \frac{2(\lambda_a(p_a)p_a - \lambda_b(p_b)p_b)}{\lambda_b(p_b)p_b^2 + \lambda_a(p_a)p_a^2}$ gilt.

Beweis Seien $Y_i = Z_i = 1, i = 1, 2, \dots$ in (3.11), dann folgt $X(t) = A(t) - B(t), t \geq 0$.

Nach Beispiel 3.18 (i) ist $(e^{\ln(\frac{\beta}{\alpha})X(t)}, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal mit $\gamma = \ln(\frac{\beta}{\alpha}) > 0$.

Nach Lemma 3.14 folgt $X(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ für $\alpha < \beta$.

Mit $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}, 0 < d \in \mathbb{N}$, und, da der Prozess X um genau ± 1 zu den zufälligen Zeitpunkten springt, gilt $X(\tau) = d$. Daher folgt

$$\mathbb{E} \gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}] = \mathbb{E} \gamma [e^{-\gamma \cdot 0}] = 1.$$

Nach Satz 3.23 und Korollar 3.15 folgt mithin für die Ruin-Wahrscheinlichkeit von X :

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \begin{cases} e^{-\ln(\frac{\beta}{\alpha})d} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^d, & \text{falls } \alpha < \beta \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es seien $d := I_s(0), A := N_a$ und $B := N_b$, dann ist $\alpha = \lambda_a(p_a), \beta = \lambda_b(p_b)$. Somit gilt

$$I_s(t) = d - X(t), \quad t \geq 0,$$

und mit

$$\begin{aligned}\tau &= \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : d - X(t) \leq 0\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : I_s(t) \leq 0\}\end{aligned}$$

folgt direkt die Behauptung zu (3.20).

Es seien $Y_i = y, Z_i = z, i = 1, 2, \dots$ in (3.11), somit folgt $X(t) = \sum_{i=1}^{A(t)} y - \sum_{i=1}^{B(t)} z, t \geq 0$. Nach Beispiel 3.18 (ii) besitzt $\gamma > 0$ keine explizite Darstellung. Falls $\alpha y \rightarrow \beta z$ gilt, kann γ nach Lemma 3.19 durch

$$\gamma \sim \frac{2(\beta \mathbb{E}Z_1 - \alpha \mathbb{E}Y_1)}{\alpha \mathbb{E}Y_1^2 + \beta \mathbb{E}Z_1^2} = \frac{2(\beta z - \alpha y)}{\alpha y^2 + \beta z^2}$$

approximiert werden.

Weiter sind die Schranken nach Lemma 3.24 für $\mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}]$ gesucht.

$$g(x) = \frac{\int_{\{y \geq x\}} F_Y(dy)}{\int_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)} F_Y(dy)} = \frac{\mathbb{1}_{\{y \geq x\}}}{\mathbb{1}_{\{y \geq x\}} e^{\gamma(y-x)}} = \begin{cases} e^{-\gamma(y-x)}, & \text{falls } y \geq x \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\inf_{x \geq 0} g(x) &= \inf_{x \geq 0} e^{-\gamma(y-x)} = e^{-\gamma y}, \\ \sup_{x \geq 0} g(x) &= \sup_{x \geq 0} e^{-\gamma(y-x)} = e^{-\gamma \cdot 0} = 1.\end{aligned}$$

Daher folgt

$$e^{-\gamma y} \leq \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}] \leq 1.$$

Nun seien jetzt $d := I_c(0), A := N_b, B := N_a, y = p_b, z = p_a$, dann sind $\alpha = \lambda_b(p_b), \beta = \lambda_a(p_a)$. Somit gilt

$$I_c(t) = d - X(t), \quad t \geq 0,$$

und daraus folgt analog die Behauptung zu (3.21). \square

Die Ausfallwahrscheinlichkeit des Inventar-Prozesses an Bargeldeinheiten in (3.21) ist auch für konkrete beliebig gewählte Parameter in Beispiel 3.28 simuliert worden.

Die weiteren Ergebnisse bezüglich der Strategie des Marketmaker gibt Garman in [3] ebenfalls ohne Beweise und Verweise auf andere Quellen an.

Von Nutzen ist die Bedingung in dem folgenden Korollar:

Korollar 3.31 *Die Ausfallwahrscheinlichkeit des Marketmakers ist kleiner 1, wenn für den Marketmaker-Spread $s := p_a - p_b > 0$ gilt.*

Beweis Aus den Nebenbedingungen in (3.20) und (3.21) folgt, dass die Ungleichungen

$$\lambda_a(p_a) < \lambda_b(p_b) \quad \text{und} \quad p_b \lambda_b(p_b) < p_a \lambda_a(p_a)$$

gleichzeitig erfüllt sein müssen. Es gilt einerseits

$$\lambda_a(p_a) < \lambda_b(p_b) \Leftrightarrow \frac{\lambda_a(p_a)}{\lambda_b(p_b)} < 1 \quad (*)$$

und andererseits

$$p_b \lambda_b(p_b) < p_a \lambda_a(p_a) \Leftrightarrow \frac{p_b}{p_a} < \frac{\lambda_a(p_a)}{\lambda_b(p_b)} \stackrel{(*)}{<} 1 \Rightarrow \frac{p_b}{p_a} < 1.$$

Daher gilt wiederum $p_b < p_a$. Also muss der Marketmaker zum Beginn den Bid-Preis kleiner als den Ask-Preis setzen, was zu $s > 0$ führt. \square

Aus den Nebenbedingungen in (3.20) und (3.21) ist zu sehen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten auch durch die Wahl der Höhe des Startkapitals beeinflusst werden können. Je größer das Startkapital gewählt wird, desto kleiner sind die Ausfallwahrscheinlichkeiten des Marketmakers. Außerdem ist eine positive Drift in beiden Inventaren erkennbar. Die Aussagen über Höhe der Bid- und Ask-Preise bzw. die Größe des Marketmaker-Spreads können daraus nicht hergeleitet werden.

Als nächstes gibt Garman in [3] die doppelseitige Ausfallwahrscheinlichkeit des Marketmakers und die erwartete Zeit bis zum Ausfall in Abhängigkeit von beiden endlichen Inventaren ohne Beweis an. Dazu werden die Bid- und Ask-Preise gleich dem Markträumungspreis gesetzt. Der Marketmaker darf nicht umschulden, d.h. einen Kredit aufnehmen oder Leerverkäufe machen. Also kann er seine Rolle solange ausführen, bis ihm entweder das Wertpapier- oder das Bargeldinventar ausgeht, d.h., dass der Prozess $(I_s(t) - I_s)_{t \geq 0}$ eine der beiden Schranken $-I_s \leq 0 \leq \pi$ trifft, wobei π die normierte Anzahl von Bargeldeinheiten ist.

Satz 3.32 *Es sei $p_a = p_b = p^*$. Dann ist $\lambda_a = \lambda_b = \lambda^*$. Seien $I_s, I_c \geq 0$ jeweils das Startinventar des Marketmakers an Wertpapiereinheiten und Bargeldeinheiten, $\mathbb{N} \ni \pi \leq \frac{I_c}{p^*}$ die normierte Anzahl von Bargeldeinheiten und sei*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : I_s(t) \leq 0 \text{ oder } I_s(t) \geq I_s + \pi\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[I_s(\tau) = 0] &= \frac{\pi}{I_s + \pi}, \\ \mathbb{P}[I_s(\tau) = I_s + \pi] &= \frac{I_s}{I_s + \pi}, \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{E}[\tau] = \frac{I_s \pi}{2\lambda^*}.$$

Beweis Der Beweis beruht auf der bekannten Martingaltechnik aus [14]. Zu finden sind also zwei Martingale, eins um die Austrittswahrscheinlichkeit aus dem Streifen $(-I_s, \pi)$ und das andere um die erwartete Zeit bis zum Austritt zu berechnen.

Der Prozess $(I_s(t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist ein \mathbb{F} adaptierter \mathcal{L}^1 -Prozess, und mit der Unabhängigkeit der Zuwächse des Poisson-Prozesses folgt für $0 \leq u \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_s(t) | \mathcal{F}_u] &= \mathbb{E}[I_s(0) + N_b(t) - N_a(t) | \mathcal{F}_u] \\ &= I_s(0) + N_b(u) - N_a(u) + \mathbb{E}[(N_b(t) - N_b(u)) - (N_a(t) - N_a(u)) | \mathcal{F}_u] \\ &= I_s(u) + \mathbb{E}[(N_b(t) - N_b(u)) - (N_a(t) - N_a(u))] \\ &= I_s(u) + \lambda^*(t - u) - \lambda^*(t - u) \\ &= I_s(u). \end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

Der Prozess $(I_s(t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist also selbst ein Martingal.

Da die erste und zweite Wald-Gleichungen aus [14], 11.5.4, 11.5.6 nicht angewendet werden können, bedarf es einer anderen Methode. Aus [14], 15.5.7, ist bekannt, dass $(B(t)^2 - t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist, wobei $B(t)$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist ¹.

Nun gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(I_s(t) - I_s)^2] &= \mathbb{E}[(N_b(t))^2 - 2N_b(t)N_a(t) + (N_a(t))^2] \\ &= \text{Var}[N_b(t)] + \mathbb{E}[N_b(t)^2] - 2\mathbb{E}[N_b(t)]\mathbb{E}[N_a(t)] + \text{Var}[N_a(t)] + \mathbb{E}[N_a(t)^2] \\ &= \lambda^*t + (\lambda^*t)^2 - 2\lambda^*t\lambda^*t + \lambda^*t + (\lambda^*t)^2 = 2\lambda^*t. \end{aligned}$$

Mithin ist der Prozess $((I_s(t) - I_s)^2 - 2\lambda^*t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ auch ein Martingal.

Die gestoppten Prozesse $(I_s(\tau \wedge t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ und $((I_s(\tau \wedge t) - I_s)^2 - 2\lambda^*(\tau \wedge t), \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sind auch Martingale, da τ eine Stoppzeit ist. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} I_s &= \mathbb{E}[I_s(0)] \\ &= \mathbb{E}[I_s(\tau \wedge 0)] \\ &= \mathbb{E}[I_s(\tau \wedge t)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[(I_s(0) - I_s)^2 - 2\lambda^*0] \\ &= \mathbb{E}[(I_s(\tau \wedge 0) - I_s)^2 - 2\lambda^*(\tau \wedge 0)] \\ &= \mathbb{E}[(I_s(\tau \wedge t) - I_s)^2 - 2\lambda^*(\tau \wedge t)]. \end{aligned}$$

Es gilt $0 \leq I_s(\tau \wedge t) \leq I_s + \pi$ und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt für $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} I_s &= \mathbb{E}[I_s(\tau)] = 0 \cdot \mathbb{P}[I_s(\tau) = 0] + (\pi + I_s) \cdot \mathbb{P}[I_s(\tau) = \pi + I_s] \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[I_s(\tau) = \pi + I_s] &= \frac{I_s}{\pi + I_s} \\ \Rightarrow \mathbb{P}[I_s(\tau) = 0] &= 1 - \mathbb{P}[I_s(\tau) = \pi + I_s] = \frac{\pi}{\pi + I_s} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}[(I_s(\tau) - I_s)^2 - 2\lambda^*\tau] \\ &= \mathbb{E}[(I_s(\tau) - I_s)^2] - 2\lambda^*\mathbb{E}[\tau] \\ &= (-I_s)^2 \frac{\pi}{I_s + \pi} + \pi^2 \frac{I_s}{I_s + \pi} - 2\lambda^*\mathbb{E}[\tau] \\ &= \frac{I_s\pi(I_s + \pi)}{I_s + \pi} - 2\lambda^*\mathbb{E}[\tau] \\ &= I_s\pi - 2\lambda^*\mathbb{E}[\tau] \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[\tau] &= \frac{I_s\pi}{2\lambda^*}. \end{aligned}$$

□

¹Allgemein gilt, dass $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ein Martingal ist, wobei $(M_t)_{t \geq 0}$ ein \mathcal{L}^2 Martingal ist (Vgl. [8], 21.70).

3 Inventar-Modelle

Die Arbeit von Garman kann verallgemeinert werden, indem im Prozess X in (3.11) für die Folgen Y und Z auch andere Verteilungen zugelassen werden, für die die Laplace-Transformierten $L_Y(s)$ und $L_Z(s)$ wie in Korollar 3.16 existieren.

Es seien $I_s := (I_s(t))_{t \geq 0}$ und $I_c := (I_c(t))_{t \geq 0}$ wieder der Wertpapierinventar- und Bargeldinventar-Prozesse des Marketmakers, wobei

$$I_s(t) := I_s(0) + \sum_{i=1}^{N_b(t)} Y_i^b - \sum_{i=1}^{N_a(t)} Y_i^a, \quad t \geq 0, \quad (3.22)$$

$$I_c(t) := I_c(0) + p_a \sum_{i=1}^{N_a(t)} Y_i^a - p_b \sum_{i=1}^{N_b(t)} Y_i^b, \quad t \geq 0, \quad (3.23)$$

und

- p_a und p_b die vom Marketmaker gesetzten Bid- und Ask-Preise für die Wertpapiere,
- $I_s(0), I_c(0) > 0$ das Startkapital des Marketmakers an Wertpapiereinheiten und Bargeldeinheiten,
- $N_a(t)$ und $N_b(t)$ die bis zum Zeitpunkt t abgewickelten Kauf- und Verkaufsaufträge,
- Y_i^a und Y_i^b die Anzahl der bei i -tem Auftrag vom Marketmaker verkauften und gekauften Wertpapiere, wobei Y^a nach F^a und Y^b nach F^b verteilt sind,

sind.

Allgemein gilt dann die einseitige Ausfallwahrscheinlichkeit nach Satz 3.23, wobei $\gamma > 0$ die Lösung der Gleichung $\kappa(s) = 0$ mit $\kappa(s)$ aus (3.12) ist. Im Falle, wenn γ nicht explizit berechnet werden kann, kann die Lösung der Gleichung wie in Lemma 3.19 approximiert werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeit kann durch Ungleichungen in Lemma 3.24 beschränkt bzw. durch den Algorithmus 3.27 approximiert werden.

Im nächsten Satz wird beispielhaft die Arbeit von Garman erweitert, indem für die Folgen Y und Z die exponentielle Verteilung angenommen und die Ausfallwahrscheinlichkeit aus dem Wertpapier und dem Bargeld angegeben wird.

Satz 3.33 Sei $Y_i^b \sim \text{Exp}(\mu_b)$ und $Y_i^a \sim \text{Exp}(\mu_a)$ für $i = 1, 2, \dots$, dann gilt für die einseitige Ruinwahrscheinlichkeit der Prozesse I_s und I_c :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_0(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_a(p_a)(\mu_b + \mu_a)}{\mu_a(\lambda_b(p_b) + \lambda_a(p_a))} \exp\left(-\frac{\mu_a \lambda_b(p_b) - \mu_b \lambda_a(p_a)}{\lambda_b(p_b) + \lambda_a(p_a)} I_s(0)\right), & \text{falls } \mu_b \lambda_a(p_a) < \mu_a \lambda_b(p_b), \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.24)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q_0(t) = \begin{cases} \frac{\lambda_b(p_b)\left(\frac{\mu_a}{p_a} + \frac{\mu_b}{p_b}\right)}{\frac{\mu_b}{p_b}(\lambda_a(p_a) + \lambda_b(p_b))} \exp\left(-\frac{\frac{\mu_b}{p_b} \lambda_a(p_a) - \frac{\mu_a}{p_a} \lambda_b(p_b)}{\lambda_a(p_a) + \lambda_b(p_b)} I_c(0)\right), & \text{falls } \mu_a p_b \lambda_b(p_b) < \mu_b p_a \lambda_a(p_a), \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Beweis Um die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Prozesse in (3.22) und (3.23) herzuleiten, sei jetzt der Prozess X in (3.11) mit exponentiell verteilten Folgen Y und Z zu den Parametern $\mu > 0$ und $\nu > 0$ gegeben.

Nun seien $d := I_s(0)$, $A := N_a$, $B := N_b$, $Y := Y^a$ und $Z := Y^b$, dann ist $\alpha = \lambda_a(p_a)$, $\beta = \lambda_b(p_b)$, $\mu = \mu_a$ und $\nu = \mu_b$.

Somit gilt $I_s(t) = d - X(t)$, $t \geq 0$, und mit $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\} = \inf\{t \geq 0 : I_s(t) \leq 0\}$ folgt direkt die Behauptung zu (3.24) aus Satz 3.26.

Jetzt seien $d := I_c(0)$, $A := N_b$, $B := N_a$, dann ist $\alpha = \lambda_b(p_b)$, $\beta = \lambda_a(p_a)$.

Weiter seien die Folgen Y und Z durch $Y_i := p_b Y_i^b$ und $Z_i := p_a Y_i^a$ für $i = 1, 2, \dots$ definiert.

Da für $p_b \geq 0$ und $Y^b \sim \text{Exp}(\mu_b)$ gilt $Y \sim \text{Exp}(\frac{\mu_b}{p_b})$, folgt $\mu = \frac{\mu_b}{p_b}$.

Da für $p_a \geq 0$ und $Y^a \sim \text{Exp}(\mu_a)$ gilt $Z \sim \text{Exp}(\frac{\mu_a}{p_a})$, folgt $\nu = \frac{\mu_a}{p_a}$.

Somit gilt $I_c(t) = d - X(t)$, $t \geq 0$, und mit $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\} = \inf\{t \geq 0 : I_c(t) \leq 0\}$ folgt direkt die Behauptung zu (3.25) aus Satz 3.26. \square

Der Tabelle 3.3 können einige Ausfallwahrscheinlichkeiten für konkrete Daten entnehmen werden.

Bemerkung 3.34 Aus den Nebenbedingungen der Gleichungen in (3.24) und (3.25):

$$\mu_b \lambda_a(p_a) < \mu_a \lambda_b(p_b) \quad \text{und} \quad \mu_a p_b \lambda_b(p_b) < \mu_b p_a \lambda_a(p_a)$$

folgt bei der optimalen Marketmaker-Strategie wie in Korollar 3.31 ebenfalls, dass für den Marketmaker-Spread $s = p_a - p_b > 0$ gilt.

Der folgende Abschnitt behandelt ein in [3] definiertes Gewinnmaximierungsproblem.

3.2.7 Gewinnmaximierungsproblem

Um das Problem zu lösen, trifft Garman eine zusätzliche vereinfachende Annahme über die Drift-Strategie im Wertpapierinventar. Zu der Bedingung $p_a > p_b$ aus Korollar 3.31 setzt der Marketmaker die Preise p_a und p_b mithin so, dass die Ankunftsraten der eingehenden Kauf- und Verkaufsaufträge zu einem bestimmten Wert $\lambda' = \lambda_a = \lambda_b$ zusammenfallen. Dies ist in Abb. 3.6 dargestellt.

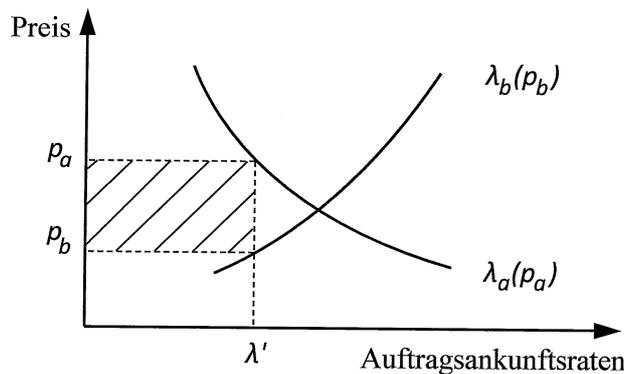


Abbildung 3.6: Marketmaker-Profitrategie [3].

Das schraffierte Rechteck in der Abb. 3.6 stellt den vom Marketmaker erwarteten Gewinn pro Zeiteinheit dar. Wie zu sehen ist, je kleiner λ' gewählt wird, desto größer ist der Marketmaker-Spread. Allerdings verringert sich das erwartete Volumen der Kauf- und Verkaufsaufträge $2\lambda'$ pro Zeiteinheit. Deshalb ist es nicht gewinnbringend, trotz der Monopolstellung des Marketmakers, den Spread zu hoch anzusetzen (Vgl. [3]).

Weiter ist es das Ziel, optimale Preise zu finden. Das nächste Lemma löst das Gewinnmaximierungsproblem unter der Annahme, dass die Ankunftsraten lineare Funktionen im Preis sind, wobei $\frac{\partial \lambda_a}{\partial p} < 0$ und $\frac{\partial \lambda_b}{\partial p} > 0$ gilt. Die angegebenen Ergebnisse in den zwei unten folgenden Lemmas liefert Garman in [3] ohne Beweise.

Lemma 3.35 *Es seien $\lambda_a(p_a) = \gamma - \delta p_a$ und $\lambda_b(p_b) = \alpha + \beta p_b$, wobei $\gamma > \alpha \geq 0$ und $\beta, \delta > 0$ sind. Dann gilt für die Auftragsankunftsrate, die den erwarteten Gewinn maximiert, und das Auftragsvolumen pro Zeiteinheit*

$$\bar{\lambda} = \frac{\gamma\beta + \alpha\delta}{2(\beta + \delta)} \quad \text{und} \quad \bar{\nu} = \frac{\gamma\beta + \alpha\delta}{(\beta + \delta)}$$

und für Bid- und Ask-Preise

$$\bar{p}_a = \frac{\gamma - \bar{\lambda}}{\delta} \quad \text{und} \quad \bar{p}_b = \frac{\bar{\lambda} - \alpha}{\beta}.$$

Folglich gilt für den Marketmaker-Spread $\bar{s} = \bar{p}_a - \bar{p}_b$ und für den erwarteten Gewinn $\bar{\pi} = \bar{s}\bar{\lambda}$ pro Zeiteinheit.

Beweis Das Auflösen der Gleichungen für $\lambda_b(p_b)$ und $\lambda_a(p_a)$ nach p_b und p_a ergibt

$$p_a = \frac{\gamma - \lambda_b(p_b)}{\delta} \quad \text{und} \quad p_b = \frac{\lambda_a(p_a) - \alpha}{\beta}. \quad (3.26)$$

Der erwartete Gewinn des Marketmakers bis zum Zeitpunkt t beträgt

$$\mathbb{E}[p_a N_a(t) - p_b N_b(t)] = p_a \mathbb{E}[N_a(t)] - p_b \mathbb{E}[N_b(t)] = p_a \lambda_a(p_a) - p_b \lambda_b(p_b). \quad (3.27)$$

Das Einsetzen p_a und p_b aus (3.26) in (3.27) und die Gleichsetzung $\lambda_b(p_b) = \lambda_a(p_a) = \bar{\lambda}$ führt zu

$$\frac{(\gamma - \bar{\lambda})\bar{\lambda}}{\delta} - \frac{(\bar{\lambda} - \alpha)\bar{\lambda}}{\beta} =: h(\bar{\lambda}).$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \bar{\lambda}}(\bar{\lambda}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma - 2\bar{\lambda}}{\delta} - \frac{2\bar{\lambda} - \alpha}{\beta} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\gamma - 2\bar{\lambda})\beta - (2\bar{\lambda} - \alpha)\delta &= 0 \\ \Leftrightarrow \gamma\beta + \alpha\delta - 2\bar{\lambda}(\delta + \beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{\lambda} &= \frac{\gamma\beta + \alpha\delta}{2(\delta + \beta)}. \end{aligned}$$

Für das Auftragsvolumen gilt $\bar{\nu} = 2\bar{\lambda}$. □

Das nachfolgende Korollar löst das gestellte Problem unter der zusätzlichen Annahme, dass der Marketmaker pro Handel Transaktionskosten zu zahlen hat.

Korollar 3.36 *Seien ξ die pro Handel erhobenen Transaktionskosten. Dann gilt für die Auftragsankunftsrate, die den erwarteten Gewinn pro Zeiteinheit maximiert:*

$$\tilde{\lambda} = \bar{\lambda} - \frac{\beta\delta\xi}{\beta + \delta}.$$

Beweis Der erwartete Gewinn des Marketmakers bis zum Zeitpunkt t beträgt

$$\mathbb{E}[p_a N_a(t) - p_b N_b(t) - (N_a(t) + N_b(t))\xi] = p_a \lambda_a(p_a) - p_b \lambda_b(p_b) - (\lambda_a(p_a) - \lambda_b(p_b))\xi.$$

Es sei

$$g(\tilde{\lambda}) := \frac{(\gamma - \tilde{\lambda})\tilde{\lambda}}{\delta} - \frac{(\tilde{\lambda} - \alpha)\tilde{\lambda}}{\beta} - 2\tilde{\lambda}\xi.$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \tilde{\lambda}}(\tilde{\lambda}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\gamma - 2\tilde{\lambda}}{\delta} - \frac{2\tilde{\lambda} - \alpha}{\beta} - 2\xi &= 0 \\ \Leftrightarrow (\gamma - 2\tilde{\lambda})\beta - (2\tilde{\lambda} - \alpha)\delta - 2\delta\beta\xi &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{\lambda} = \frac{\gamma\beta + \alpha\delta - 2\delta\beta\xi}{2(\delta + \beta)} = \bar{\lambda} - \frac{\delta\beta\xi}{\delta + \beta}. \end{aligned}$$

□

Unter den von Garman genannten Annahmen, die vielleicht in der Realität schwer zu finden sind, wurde ein Handel mit einem monopolistischen Marketmaker betrachtet. Im Zentrum der Untersuchung stand die optimale Strategie des Marketmakers, unter der er seine Rolle länger ausführen könnte.

Im nächsten Abschnitt wird ein Handelsmodell nach dem Auktionsprinzip untersucht, wobei kein zentraler Marketmaker mehr existiert. Hier konkurrieren mehrere Marktteilnehmer gegeneinander, um Wertpapiere zu kaufen oder zu verkaufen. Im Gegensatz zum vorherigen Modell verändern sich die Bid-Ask-Preise mit der Zeit und es entsteht ein Markt-Spread.

3.3 Auktionsmärkte

Garman betrachtet in [3] eine Doppelauktion, in der die Käufer gegen andere Käufer und die Verkäufer gegen andere Verkäufer im Wettbewerb stehen. Die Transaktionen erfolgen nur zwischen dem Höchstgebot und dem niedrigsten Angebot. Die Kauf- und Verkaufsaufträge sind unabhängige stochastische Prozesse. Da jedoch Aufträge dann nicht unbedingt sofort nach der Ankunft ausgeführt werden können, haben alle Aufträge eine stochastische Lebenszeit bis sie abgewickelt werden.

Es gelten folgende Annahmen:

- (i) Pro n -ter Auftrag $\phi_n = (p, Y_n)$, $n \geq 1$ wird eine Einheit des Wertpapiers $Y_n \equiv 1$ zum Preis $p \in \{p_j\}_{j=1}^K$, $p_1 < p_2 < \dots < p_K$, aufgegeben.
- (ii) Kauf- und Verkaufsaufträge der Auktionsteilnehmer treffen in Poisson-Prozessen N_a^j und N_b^j zu den stationären Parameterfunktionen $\lambda_a(p_j)$ und $\lambda_b(p_j)$, $j = 1, \dots, K$, ein.
- (iii) $A(t)$ und $B(t)$ sind die Mengen der Kauf- und Verkaufsaufträge, die zum Zeitpunkt t aktiv sind.
- (iv) Die Lebenszeiten der Aufträge sind zum Parameter ν identisch exponentiell verteilt.
- (v) $p_{bid} := \max\{p : \phi_n \in A(t)\}$ und $p_{ask} := \min\{p : \phi_n \in B(t)\}$ sind die aktuellen Bid- und Ask-Markt-Preise.

3 Inventar-Modelle

Alle Transaktionen werden zu den Preisen p_1, p_2, \dots, p_K durch die Zusammenführung aktiver Kauf- und Verkaufsaufträge durchgeführt, die mit dem Preis einig sind. Die Kaufaufträge, die zu einem Preis über dem aktuellen Ask-Preis p_{ask} gestellt sind, werden auf den Ask-Preis gesenkt. Die Verkaufsaufträge, die zu einem Preis unter dem aktuellen Bid-Preis p_{bid} gestellt sind, werden auf den Bid-Preis erhöht. Dies folgt dem etablierten Auktionsmarktpinzip, wonach spätere Aufträge zum besten erhältlichen Preis ausgeführt werden (Vgl. [3]).

Das erste Ziel ist es, die Dynamik der Marktstruktur dieser „Doppel-Auktion“ zu beschreiben.

Korollar 3.37 *Es seien $N_a(t) := \sum_{j=1}^K N_a^j(t)$ die Gesamtanzahl der aufgegebenen Kaufaufträge und $N_b(t) = \sum_{j=1}^K N_b^j(t)$ die Gesamtanzahl der aufgegebenen Verkaufsaufträge bis zum Zeitpunkt t .*

Dann sind $N_a := (N_a(t))_{t \geq 0}$ und $N_b := (N_b(t))_{t \geq 0}$ Poisson-Prozesse zu den Parametern

$$\alpha := \sum_{j=1}^K \lambda_a(p_j) \quad \text{und} \quad \beta := \sum_{j=1}^K \lambda_b(p_j).$$

Beweis Nach Lemma 3.1 ist eine Überlagerung von Poisson-Prozessen wieder ein Poisson-Prozess. \square

Die Preiswahrscheinlichkeitsfunktionen sind durch

$$a_j := \frac{\lambda_a(p_j)}{\alpha} \quad \text{und} \quad b_j := \frac{\lambda_b(p_j)}{\beta}$$

gegeben. a_j ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein eingehender Kaufauftrag den Preis p_j hat und b_j ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit für einen Verkaufsauftrag [3].

Es sei $\mathcal{N}(t) = (\mathcal{N}^j(t))_{j=1}^K \in \mathbb{Z}^K$, wobei die j -te Koordinate $\mathcal{N}^j(t)$ die Anzahl der Aufträge zum Preis p_j angibt, die auf der Auktion zum Zeitpunkt t aktiv sind. Ist $\mathcal{N}^j(t) > 0$, so sind $\mathcal{N}^j(t)$ Kaufaufträge zum Preis p_j aktiv, ist $\mathcal{N}^j(t) < 0$, so sind $|\mathcal{N}^j(t)|$ Verkaufsaufträge zum Preis p_j aktiv. Daher beschreibt die K -dim Zufallsvariable $\mathcal{N}(t)$ den Auktionsmarktzustand zum Zeitpunkt t .

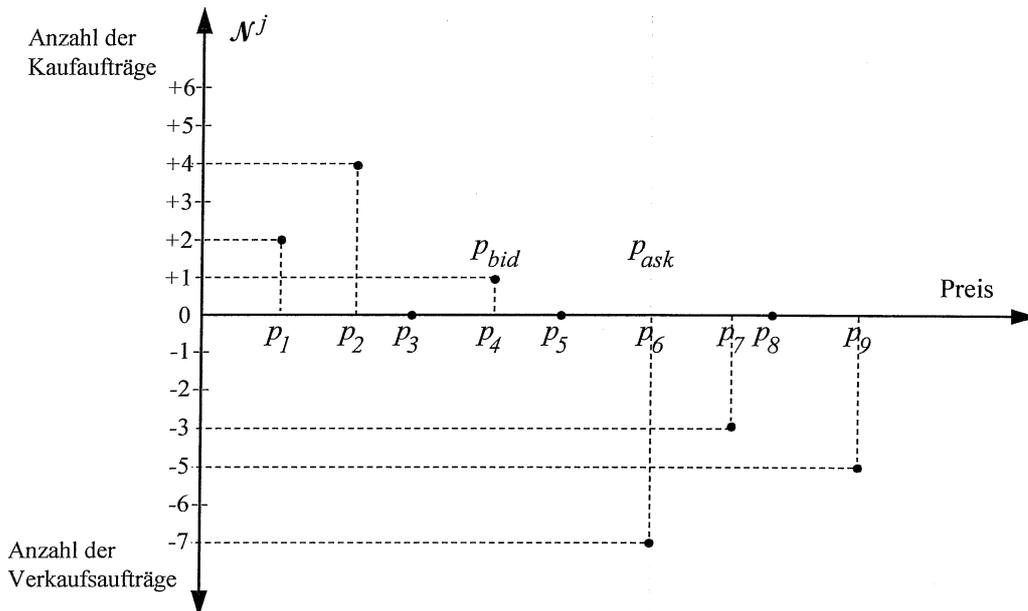


Abbildung 3.7: Zustandsbeschreibung einer Doppelauktion zum Zeitpunkt $t \geq 0$ [3].

3 Inventar-Modelle

Das Beispiel in der Abbildung 3.7, das aus [3] entnommen ist, veranschaulicht einen möglichen Marktzustand eines Auktionsmarktes für $K = 9$ zu einem konkreten Zeitpunkt.

Der Vektor $\mathcal{N}(t) = (2, 4, 0, 1, 0, -7, -3, 0, -5)$ stellt somit den aktuellen Marktzustand in Abbildung 3.7 dar und für die Bid-Ask-Preise gilt:

$$\begin{aligned} p_{bid} &= \max\{p : \phi_n \in A(t)\} = \max\{p_1, p_2, p_4\} = p_4, \\ p_{ask} &= \min\{p : \phi_n \in B(t)\} = \min\{p_6, p_7, p_9\} = p_6. \end{aligned}$$

Angenommen, dass das nächste (n -te) Ereignis die Ankunft eines Kaufangebots zum Preis $p \in \{p_j\}_{j=1}^K$ ist. Wenn $p \geq p_6$ ist, dann tritt eine Transaktion zum Preis p_6 auf und es ist $\mathcal{N}^6(T_n) = i_6 + 1 = -7 + 1 = -6$. Wenn $p < p_6$ ist, z.B. $p = p_5$, dann tritt keine Transaktion auf und es sind $\mathcal{N}^j(T_n) = i_5 + 1 = 0 + 1 = 1$ und $p_{bid} = p_5$.

Es sei $\mathbb{P}_{i_1, \dots, i_K}(t) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}^1(t), \mathcal{N}^2(t), \dots, \mathcal{N}^K(t) = (i_1, i_2, \dots, i_K)\right)$, $i_j \in \mathbb{Z}$, d.h. $\mathbb{P}_{i_1, \dots, i_K}(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Auktionszustand zum Zeitpunkt t den Wert (i_1, i_2, \dots, i_K) annimmt. Außerdem seien δ der Index des Bid-Preises und σ der Index des Ask-Preises, wobei

$$\delta(i_1, i_2, \dots, i_K) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i_j \leq 0, j = 1, 2, \dots, K \\ J, & \text{falls } i_J > 0, \text{ und } i_{J+k} \leq 0, k = 1, 2, \dots, K - J, \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\sigma(i_1, i_2, \dots, i_K) = \begin{cases} K + 1, & \text{falls } i_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, K \\ J, & \text{falls } i_J < 0, \text{ und } i_{J-k} \geq 0, k = 1, 2, \dots, J - 1, \end{cases}$$

gilt. In der Abbildung 3.7 sind $\delta = 4$ und $\sigma = 6$.

Der Prozess $(\mathcal{N}(t))_{t \geq 0}$ ist als ein K -dim Markov-Prozess auch ein spezieller Geburts- und Todes-Prozess. In jeder Koordinate des Prozesses $(\mathcal{N}^j(t))_{t \geq 0}$, $j = 1, \dots, K$, sind nur Übergänge von $n - 1$ nach n und von $n + 1$ nach n , $n \in \mathbb{Z}$, möglich. Daher können dann die Kolomogorov-Rückwärts-Gleichungen des Marktmodells, die durch die Verteilung $\mathbb{P}_{i_1, \dots, i_K}(t)$ gelöst werden, wie folgt geschrieben werden (Vgl. [3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{i_1, \dots, i_K}(t)}{\partial t} &= -\alpha - \beta - \nu \sum_{j=1}^K |i_j| P_{i_1, \dots, i_K}(t) \\ &\quad + \alpha \sum_{j=1}^{\sigma} (a_j P_{i_1, \dots, (i_j+1), \dots, i_K}(t)) \\ &\quad + \alpha \left(\sum_{j=0}^K a_j \right) P_{i_1, \dots, (i_{\sigma}-1), \dots, i_K}(t) \\ &\quad + \beta \sum_{j=\delta+1}^{\nu} (b_j P_{i_1, \dots, (i_j-1), \dots, i_K}(t)) \\ &\quad + \beta \left(\sum_{j=1}^{\delta} b_j \right) P_{i_1, \dots, (i_{\delta}+1), \dots, i_K}(t) \\ &\quad + \nu \sum_{j=1}^{\delta} |i_j| P_{i_1, \dots, (i_j-1), \dots, i_K}(t) \\ &\quad + \nu \sum_{j=0}^K |i_j| P_{i_1, \dots, (i_j+1), \dots, i_K}(t). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die analytischen Lösungen des Gleichungssystems 3.29, die den stationären Wahrscheinlichkeiten für jeden Marktzustand entsprechen, sind im Allgemeinen schwer zu finden [3].

3.3.1 Der Fall: $K = 1$

Wenn es nur einen einzigen festgelegten Preis p für alle Aufträge gibt, kann der Auktionsmarkt als einfache „Clearingstelle“ um Käufer und Verkäufer zusammen zu bringen, interpretiert werden [3].

Da $K = 1$ ist, gibt es nur einen Preis p zu dem die Kauf- und Verkaufsaufträge aufgegeben werden können. Somit gibt die eindimensionale Zufallsvariable $\mathcal{N}(t) \in \mathbb{Z}$, die Anzahl der Aufträge zum Preis p an, die auf der Auktion zum Zeitpunkt t aktiv sind. Es gilt wie vorher, dass $\mathcal{N}(t)$ Kaufaufträge aktiv sind, wenn $\mathcal{N}(t) > 0$ ist, und $|\mathcal{N}(t)|$ Verkaufsaufträge aktiv sind, wenn $\mathcal{N}(t) < 0$ ist.

Der Prozess $(\mathcal{N}(t))_{t \geq 0}$ ist ein Markov-Prozess. Es bezeichnen q_{ij} die Zustandsübergangsintensitäten von Zustand i nach j mit den folgenden Werten (siehe [3]):

$$\begin{aligned}
 q_{n,n+1} &= \begin{cases} \lambda_a(p), & n \geq 0, \\ \lambda_a(p) - n\nu, & n < 0 \end{cases} \\
 q_{n,n-1} &= \begin{cases} \lambda_b(p) + n\nu, & n > 0, \\ \lambda_b(p), & n \leq 0 \end{cases} \\
 q_{n,n} &= \begin{cases} \lambda_a(p) + \lambda_b(p) + n\nu, & n > 0, \\ \lambda_a(p) + \lambda_b(p), & n = 0, \\ \lambda_a(p) + \lambda_b(p) - n\nu, & n < 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Die stationäre Verteilung $\pi_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{N}(t) = n)$, $n \in \mathbb{Z}$, erfüllt somit die Gleichung:

$$0 = -\pi_n q_{n,n} + \pi_{n-1} q_{n-1,n} + \pi_{n+1} q_{n+1,n} \tag{3.31}$$

mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n = 1, \tag{3.32}$$

wobei π_n den Anteil der Zeit darstellt, während der auf der Auktion $|n|$ Kaufaufträge, falls $n > 0$, oder Verkaufsaufträge, falls $n < 0$, aktiv sind. In der Abbildung 3.8 ist zu erkennen, dass der Term $\pi_n q_{n,n}$ den Abfluss aus dem Zustand n und $\pi_{n-1} q_{n-1,n} + \pi_{n+1} q_{n+1,n}$ den Zufluss in den Zustand n darstellt.

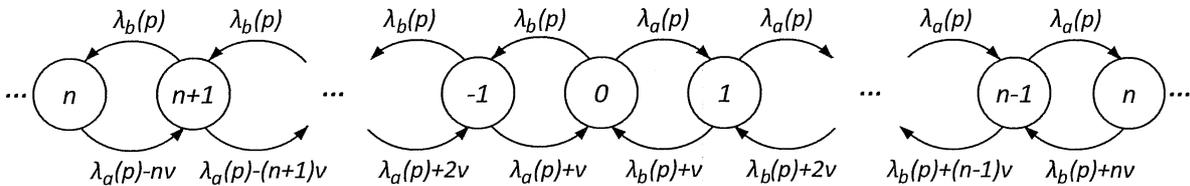


Abbildung 3.8: Zustandsübergangsintensitäten-Diagramm.

Lemma 3.38 *Es gilt*

$$\pi_n = \begin{cases} \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + i\nu}, & n \geq 1, \\ \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_b(p)}{\lambda_a(p) + i\nu}, & n \leq -1, \end{cases} \tag{3.33}$$

wobei π_0 die Wahrscheinlichkeit ist, dass kein Auftrag auf der Auktion aktiv ist.

3 Inventar-Modelle

Beweis $\{\pi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ erfüllen die Gleichungen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi_n q_{n,k} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi_k q_{k,n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

und daher gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k} \pi_n q_{n,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq k} \pi_k q_{k,n} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen folgt durch die Gleichsetzung der Wahrscheinlichkeitsflüsse aus und in den Zustand n die folgenden Beziehungen (siehe [2], 4.5.5)

$$\begin{aligned} \pi_{n-1} q_{n-1,n} &= \pi_n q_{n,n-1}, & n \geq 1 \\ \stackrel{(3.30)}{\Leftrightarrow} \pi_{n-1} \lambda_a(p) &= \pi_n (\lambda_b(p) + n\nu) \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_{n-1} \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + n\nu} \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_{n-2} \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + (n-1)\nu} \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + n\nu} \\ &\vdots \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + i\nu} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \pi_n q_{n,n+1} &= \pi_{n+1} q_{n+1,n}, & n \leq -1 \\ \stackrel{(3.30)}{\Leftrightarrow} \pi_n (\lambda_a(p) - n\nu) &= \pi_{n+1} \lambda_b(p), & n \leq -1 \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_{n+1} \frac{\lambda_b(p)}{\lambda_a(p) - n\nu} \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_{n+2} \frac{\lambda_b(p)}{\lambda_a(p) - (n+1)\nu} \frac{\lambda_b(p)}{\lambda_a(p) - n\nu} \\ &\vdots \\ \Leftrightarrow \pi_n &= \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_b(p)}{\lambda_a(p) + i\nu}. \end{aligned}$$

□

Als nächstes werden die Wahrscheinlichkeiten π_0 , $\pi_+ = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$, $\pi_- = \sum_{n=-\infty}^{-1} \pi_n$ gesucht, wobei

$$\pi_0 + \pi_+ + \pi_- = \pi_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \pi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \stackrel{(3.32)}{=} 1 \quad (3.34)$$

gilt.

Das Ergebnis im folgenden Lemma und seine Herleitung ist aus [3] entnommen worden.

Satz 3.39 (Vgl. [3]) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\pi_+ &= \pi_0 e^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} \cdot \frac{\lambda_a(p)}{\nu}^{-\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} \cdot \int_0^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} e^{-t} t^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} dt, \\ \pi_- &= \pi_0 e^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} \cdot \frac{\lambda_b(p)}{\nu}^{-\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} \cdot \int_0^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} e^{-t} t^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} dt, \\ \pi_0 &= \left(1 + e^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} \cdot \frac{\lambda_a(p)}{\nu}^{-\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} \cdot \int_0^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} e^{-t} t^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} dt + e^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} \cdot \frac{\lambda_b(p)}{\nu}^{-\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} \cdot \int_0^{\frac{\lambda_b(p)}{\nu}} e^{-t} t^{\frac{\lambda_a(p)}{\nu}} dt \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Beweis ([3]) *Es folgt*

$$\begin{aligned}\pi_+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \\ &\stackrel{(3.32)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_a(p)}{\lambda_b(p) + i\nu} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 \prod_{i=1}^n \frac{\nu \lambda_a(p)}{\nu(\lambda_b(p) + i\nu)} \\ &= \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_a(p)}{\nu} \right)^n \prod_{i=1}^n \frac{\nu}{(\lambda_b(p) + i\nu)} \\ &= \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_a(p)}{\nu} \right)^n \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_b(p)}{\nu} + i \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Es gilt für alle y

$$\prod_{i=1}^n (y + i - 1)^{-1} = \frac{\Gamma(y + n)}{\Gamma(y)}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

wobei

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma}(y, x) = \int_0^x e^{-t} t^{y-1} dt \quad \text{Re } y > 0$$

vollständige und unvollständige Gammafunktionen sind. Die unvollständige Gammafunktion besitzt die Reihendarstellung (siehe [15], (4))

$$\tilde{\Gamma}(y, x) = e^{-x} x^y \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(y + n + 1)}. \quad (3.36)$$

Es bezeichne $x := \frac{\lambda_a(p)}{\nu}$ und $y := \frac{\lambda_b(p)}{\nu}$. Dann folgt weiter

$$\begin{aligned}\pi_+ &= \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \prod_{i=1}^n (y + i)^{-1} \\ &\stackrel{(3.35)}{=} \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{\Gamma(y + 1)}{\Gamma(y + 1 + n)} \\ &= \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \frac{\Gamma(y + 1)}{\Gamma(y + 1 + n + 1)}\end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

$$\begin{aligned}
&= \pi_0 \frac{x}{e^{-x} x^{y+1}} e^{-x} x^{y+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{\Gamma(y+1)}{\Gamma(y+1+n+1)} \\
&\stackrel{(3.36)}{=} \pi_0 e^x x^{-y} \tilde{\Gamma}(y+1, x).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\pi_- = \pi_0 e^y y^{-x} \tilde{\Gamma}(x+1, y). \tag{3.38}$$

Dann folgt mit (3.37) und (3.38)

$$\begin{aligned}
&\pi_0 + \pi_+ + \pi_- \stackrel{(3.34)}{=} 1 \\
\Leftrightarrow &\pi_0 + \pi_0 e^x x^{-y} \tilde{\Gamma}(y+1, x) + \pi_0 e^y y^{-x} \tilde{\Gamma}(x+1, y) = 1 \\
\Leftrightarrow &\pi_0 (1 + e^x x^{-y} \tilde{\Gamma}(y+1, x) + e^y y^{-x} \tilde{\Gamma}(x+1, y)) = 1 \\
\Leftrightarrow &\pi_0 = (1 + e^x x^{-y} \tilde{\Gamma}(y+1, x) + e^y y^{-x} \tilde{\Gamma}(x+1, y))^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Sei \mathcal{N} der aktuelle Marktzustand. Als nächstes Satz liefert den Erwartungswert des Marktzustandes.

Satz 3.40 (Vgl. [3]) *Es gilt*

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}] = \frac{\lambda_a(p) - \lambda_b(p)}{\nu}.$$

Beweis [3] Für den Erwartungswert des Marktzustandes gilt

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \mathbb{P}(\mathcal{N} = n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \pi_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(3.31)}{=} -q_{n,n} \pi_n + q_{n-1,n} \pi_{n-1} + q_{n+1,n} \pi_{n+1} \\
\Leftrightarrow 0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (-q_{n,n} \pi_n + q_{n-1,n} \pi_{n-1} + q_{n+1,n} \pi_{n+1}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n q_{n,n} \pi_n + (n+1) q_{n,n+1} \pi_n + (n-1) q_{n,n-1} \pi_n) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} (-n q_{n,n} + (n+1) q_{n,n+1} + (n-1) q_{n,n-1}) \pi_n \\
&\quad + \sum_{n=0}^0 (-n q_{n,n} + (n+1) q_{n,n+1} + (n-1) q_{n,n-1}) \pi_n \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-n q_{n,n} + (n+1) q_{n,n+1} + (n-1) q_{n,n-1}) \pi_n \\
&\stackrel{(3.30)}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} (-n(\lambda_a(p) + \lambda_b(p) - n\nu) + (n+1)(\lambda_a(p) - n\nu) + (n-1)\lambda_b(p)) \pi_n \\
&\quad + \sum_{n=0}^0 (-n(\lambda_a(p) + \lambda_b(p)) + (n+1)\lambda_a(p) + (n-1)\lambda_b(p)) \pi_n
\end{aligned}$$

3 Inventar-Modelle

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-n(\lambda_a(p) + \lambda_b(p) + n\nu) + (n+1)\lambda_a(p) + (n-1)(\lambda_b(p) + n\nu))\pi_n \\
= & \sum_{n=-\infty}^{-1} (\lambda_a(p) - \lambda_b(p) - n\nu)\pi_n + (\lambda_a(p) - \lambda_b(p))\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_a(p) - \lambda_b(p) - n\nu)\pi_n \\
= & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_a(p) - \lambda_b(p) - n\nu)\pi_n \\
= & (\lambda_a(p) - \lambda_b(p)) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi_n}_{=1} - \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\pi_n \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\pi_n}_{=\mathbb{E}[\mathcal{N}]} = \frac{\lambda_a(p) - \lambda_b(p)}{\nu}.
\end{aligned}$$

□

Die erwartete Anzahl der Aufträge, die auf der Auktion aktiv sind, ist $E[|\mathcal{N}|]$.

Satz 3.41 (Vgl. [3]) Für die Erwartung des Marktzustands gilt

$$\mathbb{E}[|\mathcal{N}|] = \frac{(\lambda_b(p) - \lambda_a(p))\pi_{-} + (\lambda_b(p) + \lambda_a(p))\pi_0 + (\lambda_a(p) - \lambda_b(p))\pi_{+}}{\nu}.$$

Beweis ([3]) Für den Erwartungswert des Marktzustandes gilt

$$\mathbb{E}[|\mathcal{N}|] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \mathbb{P}(\mathcal{N} = n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \pi_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
0 & \stackrel{(3.31)}{=} -q_{n,n}\pi_n + q_{n-1,n}\pi_{n-1} + q_{n+1,n}\pi_{n+1} \\
\Leftrightarrow 0 & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|(-q_{n,n}\pi_n + q_{n-1,n}\pi_{n-1} + q_{n+1,n}\pi_{n+1}) \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-|n|q_{n,n} + |n+1|q_{n,n+1} + |n-1|q_{n,n-1})\pi_n \\
& \stackrel{(3.30)}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} (\lambda_b(p) - \lambda_a(p) - |n|\nu)\pi_n + (\lambda_a(p) + \lambda_b(p))\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_a(p) - \lambda_b(p) - |n|\nu)\pi_n \\
& = \left((\lambda_b(p) - \lambda_a(p))\pi_{-} + (\lambda_a(p) + \lambda_b(p))\pi_0 + (\lambda_a(p) - \lambda_b(p))\pi_{+} \right) - \nu \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\pi_n \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|\pi_n}_{=\mathbb{E}[|\mathcal{N}|]} = \frac{(\lambda_b(p) - \lambda_a(p))\pi_{-} + (\lambda_a(p) + \lambda_b(p))\pi_0 + (\lambda_a(p) - \lambda_b(p))\pi_{+}}{\nu}.
\end{aligned}$$

□

Unter den von Garman genannten Annahmen wurde eine Doppelauktion untersucht, in der Marktteilnehmer im Wettbewerb stehen. Im Fokus stand die Dynamik des Marktes.

4 Ausblick

Es wurden inventar-basierte Basismärkte nach dem Marketmaker- und Auktionsprinzip von Garman finanzmathematisch untersucht. Bei beiden Modellen wurde die stochastische Ankunft von Kauf- und Verkaufsaufträgen bei der Bestimmung der Wertpapierhandelspreise berücksichtigt.

Das Marketmaker-Modell erwies sich laut O'Hara geeigneter, um die Funktionsweise der Wertpapiermärkte zu beschreiben (siehe [11]). Im Mittelpunkt dieses Ansatzes von Garman steht die Ausfallwahrscheinlichkeit des Marketmakers aus dem Geld- und Wertpapier-Inventar. Die Inventare werden durch folgende stochastische Prozesse beschrieben:

$$\begin{aligned} I_s(t) &= I_s(0) + N_b(t) - N_a(t), & t \geq 0, \\ I_c(t) &= I_c(0) + p_a N_a(t) - p_b N_b(t), & t \geq 0 \end{aligned}$$

Diese Arbeit verallgemeinert die Inventar-Prozesse zu folgenden Prozessen:

$$\begin{aligned} I_s(t) &= I_s(0) + \sum_{i=1}^{N_b(t)} Y_i^b - \sum_{i=1}^{N_a(t)} Y_i^a, & t \geq 0, \\ I_c(t) &= I_c(0) + p_a \sum_{i=1}^{N_a(t)} Y_i^a - p_b \sum_{i=1}^{N_b(t)} Y_i^b, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Um auf die Ruinwahrscheinlichkeiten des Marketmakers zu schließen, wurde zunächst die Martingal-Technik ausgearbeitet und ein Masswechsel durchgeführt. Die Untersuchungen stützen sich zum Teil auf die Ruintheorie von Assmusen in [1], Rolski u.a. in [12] und Gatto in [4], wobei die Autoren den Prozess $\sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \beta t$ betrachten.

Diese Arbeit untersucht die Eigenschaften des Prozesses

$$X(t) := \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i, \quad t \geq 0$$

unter diesen Ergebnissen. Das Hauptresultat der Arbeit ist die Darstellung der einseitigen Ausfallwahrscheinlichkeit des Prozesses $(X(t))_t$ in unendlicher Zeit unter einem optimalen exponentiellen Masswechsel

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = e^{-\gamma d} \mathbb{E}^\gamma [e^{-\gamma(X(\tau)-d)}].$$

Der Ausdruck ist einfach zu handhaben und lässt sich im exponentiellen Fall exakt auswerten.

Der Masswechsel ermöglichte außerdem weitere Berechnungen wie Schranken für den Ruin und die effiziente Simulation zur Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit des Prozesses $(X(t))_t$, was dann wiederum auf die Inventar-Prozesse des Marketmakers $(I_s(t))_t$ und $(I_c(t))_t$ angewandt worden ist.

Der Marketmaker-Ansatz von Garman unterstreicht die Bedeutung des Inventars für den Händler, um seine Rolle so lang wie möglich ausführen zu können. Jedoch ist dieses Modell

durch einige Annahmen von Garman eingeschränkt. Der Marketmaker ist z.B. nicht aktiv am Preisbildungsprozess beteiligt, da er nur zum Beginn des Handels Bid-Ask-Preise setzen darf. Laut O'Hara erlangte jedoch der Ansatz von Garman große Anerkennung und wurde zur Vorlage für viele weitere Untersuchungen des Marktes verwendet.

In einigen Arbeiten, in denen der Rahmen von Garmans Ansatz übernommen wurde, kann der Händler die Bid-Ask-Preise in Abhängigkeit vom Inventar kontinuierlich anpassen, um seine Position auf dem Markt entsprechend zu verändern. Das Inventar ist durch eine obere und eine untere Schranke begrenzt, sodass die Betrachtung der Ausfallwahrscheinlichkeit in diesem Ansatz irrelevant wird und der Fokus auf dem Preisbildungsprozess in Abhängigkeit vom Inventar liegt. Auch wie bei Garman kommt es hier zu einem positiven Marketmaker-Spread. Jedoch entsteht er, um den Gewinn zu maximieren und nicht um die Ausfallwahrscheinlichkeit zu minimieren (siehe [11], S. 23, 24).

Zudem diskutiert O'Hara die Erweiterungsoptionen mit Fokus auf das dynamische Verhalten der Märkte, in denen der Marketmaker beispielweise im Wettbewerb steht oder eine bevorzugte Inventar-Position annimmt. Hierbei wurde allerdings das von Garman gestellte Ruin-Problem außer Acht gelassen (siehe [11], S. 24).

A Kovarianzfunktion des zusammengesetzten Poisson-Prozesses

Es sei $X := (X_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess mit $X(t) := \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$, wobei $N := (N(t))_{t \geq 0}$ ein Poisson-Prozess ist mit Parameter $\lambda > 0$ und $Y := (Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger positiver nach F_Y ($F_Y(t) = 0$ für $t \leq 0$) identisch verteilter Zufallsvariablen ist, die unabhängig von N ist.

Es gilt für $u \leq t$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X(u)X(t)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(u)} Y_i \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^{N(u)} \sum_{j=0}^{N(t)} Y_i Y_j \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{N(u)} \sum_{j=0}^{N(t)} Y_i Y_j \right) \cdot \mathbb{1}_{\{N(u)=k, N(t)=l\}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l Y_i Y_j \cdot \mathbb{1}_{\{N(u)=k, N(t)=l\}} \right) \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \mathbb{E} \left[Y_i Y_j \cdot \mathbb{1}_{\{N(u)=k, N(t)=l\}} \right] \\
 &\stackrel{N, Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \mathbb{E} \left[Y_i Y_j \right] \mathbb{P}(N(u) = k, N(t) = l) \\
 &\stackrel{u \leq t \Rightarrow k \leq l}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \mathbb{E} \left[Y_i Y_j \right] \mathbb{P}(N(u) = k, N(t) - N(u) = l - k) \\
 &\stackrel{\text{unabh. Zuw.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l \mathbb{E} \left[Y_i Y_j \right] \mathbb{P}(N(u) = k) \mathbb{P}(N(t) - N(u) = l - k) \\
 &\stackrel{\text{stat. Zuw.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k \mathbb{E} Y_i^2 + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0, k \neq j}^l \mathbb{E} Y_i Y_j \right] \mathbb{P}(N(u) = k) \mathbb{P}(N(t - u) = l - k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} \left[k \mathbb{E} Y_1^2 + k(l-1) (\mathbb{E} Y_1)^2 \right] e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^k}{k!} e^{-\lambda(t-u)} \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} \\
 &= \mathbb{E} Y_1^2 e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda u)^k}{k!} \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} \\
 &+ (\mathbb{E} Y_1)^2 e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda u)^k}{k!} \sum_{l=k}^{\infty} (l-1) \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} \\
 &= \mathbb{E} Y_1^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda u \frac{(\lambda u)^{(k-1)}}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-u))^l}{l!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{(k-1)!} \sum_{l=k}^{\infty} (l-1-k+k) \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 e^{-\lambda t} \lambda u e^{\lambda u} e^{\lambda(t-u)} \\
& + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{(k-1)!} \left(\sum_{l=k}^{\infty} (l-k) \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} + \sum_{l=k}^{\infty} (k-1) \frac{(\lambda(t-u))^{(l-k)}}{(l-k)!} \right) \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{(k-1)!} \left(\lambda(t-u) e^{\lambda(t-u)} + (k-1) e^{\lambda(t-u)} \right) \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda u \frac{(\lambda u)^{(k-1)}}{(k-1)!} \lambda(t-u) e^{\lambda(t-u)} \\
& + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda u)^2 \frac{(\lambda u)^{(k-2)}}{(k-2)!} e^{\lambda(t-u)} \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} \lambda u e^{\lambda u} \lambda(t-u) e^{\lambda(t-u)} + (\mathbb{E}Y_1)^2 e^{-\lambda t} (\lambda u)^2 e^{\lambda u} e^{\lambda(t-u)} \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 \lambda^2 u(t-u) + (\mathbb{E}Y_1)^2 \lambda^2 u^2 \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 \lambda^2 u t.
\end{aligned}$$

Weiter folgt für $u \leq t$:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}[X(u), X(t)] & = \mathbb{E}[X(u)X(t)] - \mathbb{E}X(u)\mathbb{E}X(t) \\
& = \mathbb{E}Y_1^2 \lambda u + (\mathbb{E}Y_1)^2 \lambda^2 u t - \lambda u \mathbb{E}Y_1 \lambda t \mathbb{E}Y_1 \\
& = \lambda u \mathbb{E}Y_1^2.
\end{aligned}$$

Es sei jetzt $X := (X(t))_{t \geq 0}$ mit $X(t) = \sum_{j=1}^M X_j(t)$ wie in (3.4), wobei $X_j(t) = \sum_{n=1}^{N_j(t)} Y_{jn}$ ist.

Es gilt für $u \leq t$: $\nu_j(u) := \text{Cov}[X_j(u), X_j(t)] = \lambda_j u \mathbb{E}Y_{j1}^2$ und, da $X_j, j = 1, \dots, M$, unabhängig sind, gilt:

$$\begin{aligned}
\nu(u) & : = \text{Cov}[X(u), X(t)] = \mathbb{E}[X(t)X(u)] - \mathbb{E}X(u)\mathbb{E}X(t) \\
& \stackrel{(3.5)}{=} \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^M X_j(u) \sum_{i=1}^M X_i(t) \right] - \eta(u)\eta(t) \\
& = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^M \mathbb{E}[X_j(u)X_i(t)] - \eta(u)\eta(t) \\
& = \sum_{j=1}^M \mathbb{E}[X_j(u)X_j(t)] + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1, i \neq j}^M \mathbb{E}[X_j(u)X_i(t)] - \eta(u)\eta(t) \\
& \stackrel{X_j \text{ unabh.}}{=} \sum_{j=1}^M \left(\text{Cov}[X_j(u), X_j(t)] + \mathbb{E}X_j(u)\mathbb{E}X_j(t) \right) + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1, i \neq j}^M \mathbb{E}X_j(u)\mathbb{E}X_i(t) - \eta(u)\eta(t) \\
& = \sum_{j=1}^M \nu_j(u) + \sum_{j=1}^M \eta_j(u)\eta_j(t) + \sum_{j=1}^M \sum_{i=1, i \neq j}^M \eta_j(u)\eta_i(t) - \eta(u)\eta(t) \\
& = \sum_{j=1}^M \nu_j(u) + \sum_{j=1}^M \eta_j(u) \sum_{i=1}^M \eta_i(t) - \eta(u)\eta(t) = \sum_{j=1}^M \lambda_j u \mathbb{E}Y_{j1}^2. \tag{A.1}
\end{aligned}$$

B Simulation der Funktion $\kappa(s)$ und ihrer Nullstellen

Die Simulation der Funktion $\kappa(s)$ mit den Parameter $\alpha = 10, \beta = 15, y = 5, z = 4$ und die numerische Berechnung der Nullstelle $\gamma > 0$ mit der Genauigkeit 0,00001 mit Hilfe der Funktion `uniroot` in der Programmiersprache R:

```
kappa <- function ( s, a, y, b, z)
  a*(exp(s * y) - 1) + b*(exp(-s * z) - 1)
s <- c( seq( -0.03, 0.07, by = 0.0001))

NS <- uniroot( kappa, c( 0.03, 0.05), tol = 0.00001, a = 10, y = 5, b = 15,
  z = 4)
cat( "Nullstelle s= ", NS[[1]], "\n")
pdf( "Nullstelle.pdf")

par( cex = 1.6, mar = c( 3.5, 3.5, 0.5, 0.5) + 0.1, mgp = c( 2.5, 0.8, 0))

matplot( s, kappa( s, 10, 5, 15, 4), type="l", lwd=2.5,
  ylab = expression( kappa*( s)), xlab = expression( s))
abline( v = 0, lty = "dashed", lwd=2);
abline( h = 0, lty = "dashed", lwd=2)
text( 0.0378, -0.05, expression( gamma*" ~ 0.04037984"),
  pos = 4, offset = 0.2)
legend( 0.03, 0.52, title = "Parameter",
  legend = c( expression( paste( italic( alpha), " = 10 ")),
    expression( paste( beta, " = 15 ")),
    "y = 5 ",
    "z = 4 "),
  bty = "n",)
dev.off()
```

Die in R vorimplementierte Funktion `uniroot(f, interval,...)` sucht eine Nullstelle der Funktion f im vorgegebenen Intervall nach dem sogenannten Brent-Verfahren, das auf dem Bisektions- und dem Sekanten-Verfahren beruht (aufgerufen am 16.06.2015 unter <https://stat.ethz.ch/R-manual/R-devel/library/stats/html/uniroot.html>). An den Werten der Grenzen des Intervalls muss die Funktion verschiedene Vorzeichen annehmen.

C Monte-Carlo-Simulation des Prozesses unter Masswechsel

Der folgende in der Programmiersprache R implementierte Algorithmus 3.27 simuliert n Pfade des Prozesses $X(t) = \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i$, $Y_i = y$, $Z_i = z$ für alle i , bis zum Ruin $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$, $d > 0$ unter dem Mass \mathbb{P}^γ und berechnet den Schätzer vom Überschuss des Prozesses zum Ruin, $X(\tau) - d$, für die Parameter $\alpha = 11$, $\beta = 15$, $y = 5$, $z = 4$ und den Schwellenwert $d = 10$.

```
#Eingabe der Parameter
d <- 10
a <- 11
b <- 15
y <- 5
z <- 4
gamma <- 0.01941748          #in konstanten Fall (approximiert)

#Parameter nach dem Masswechsel
alpha <- a*exp(gamma* y)
beta <- b*exp(-gamma* z)

n <- 100                    #Anzahl der Pfade
TAU <- c()                 #Zeitpunkt des Ruins
Overshoot <- c()          #Überschuss nach dem Ruin
pdf( "n_Pfade.pdf")
for ( i in 1:n)
{
  AB <- 0                  #Vektor der Forderungen der Kauf- und Verkaufsaufträge
  TY <- 0
  TZ <- rexp( 1, beta)    #Zwischeneintrittszeiten der Verkaufsaufträge

  while ( sum(AB) <= d)
  {
    TY <- c ( TY, rexp(1,alpha)) #Zwischeneintrittszeiten der
                                #Kaufaufträge
    while ( sum( TZ) < sum( TY))
    {
      AB <- c( AB, -z)
      TZ <- c( TZ, rexp( 1, beta))
    }
    AB <- c( AB, y)
  }
  ty <- cumsum( TY)
  ty <- ty[ 2:length( ty)]  #Eintrittszeiten der Kaufaufträge
```

C Monte-Carlo-Simulation des Prozesses unter Masswechsel

```

tz <- cumsum( TZ)
tz <- tz[ 1:length( tz) - 1]      #Eintrittszeiten der Verkaufsaufträge
t  <- sort( c( ty, tz))          #Eintrittszeiten der Aufträge

X  <- cumsum(AB)                  #Der Prozess X(t) für t>=0
TAU[i] <- t[ length( t)]         #Zeitpunkt des Ruins des i-ten Pfades
TAU[i] <- round(TAU[i], digits = 4)
Overshoot[i] <- X[length(X)] - d #Überschuss nach dem Ruin
                                   #des i-ten Pfades

#Plotte der Pfade des Prozesses X(t)
par( cex = 1.6, mar = c( 3.5, 3.5, 0.5, 0.5)+0.1, mgp = c( 2.5, 0.8, 0))
pfad <- stepfun( t, X)          #Treppenfunktion des Prozesses X(t) für t>=0
plot( pfad, verticals=FALSE, lwd=3.5, pch=20,
      ylab = expression(X(t)), xlab = expression(t), main=NULL)
      abline( h = d, lty = "dashed", lwd=1.5)
      abline( h = 0, lwd=1.5)
      rug( ty, col = "red", lwd = 1.5)
      rug( tz, col = "blue", lwd = 1.5)
      text(x = TAU[i], y = min( X) + 0.5, col = "darkgreen", cex = 1,
labels = substitute(paste(tau == variable, sep=""), list(variable=TAU[i])))
      text(x = t[ floor( length(t)/2)], y = d + 0.8, col = "darkgreen",
cex = 1, labels = substitute(paste("X(", tau,") - d = ", variable, sep=""),
list(variable=Overshoot[i])))
}
dev.off()

#Ausgabe der Ruinzeiten und Überschüsse zum Ruinzeitpunkt aller
#n simuliertenPfade in einer Tabelle
N <- 1:n
(Ruin <- cbind( N, TAU, Overshoot))

#Die Daten in eine Datei speichern
write.table(Ruin, file = "MSC_Ruin.txt", quote = FALSE, sep = " & ",
            row.names = FALSE , eol = " \\\\ \n ")

#Berechnung des Schätzers des Überschusses
(OvershootSchaetzer <- sum( Overshoot) / n)

#Berechnung des Schätzers der Ruinwahrscheinlichkeit
( Ruin <- exp( -gamma*( d + OvershootSchaetzer)))
(TAUSchaetzer <- sum( TAU) / n)

```

Der obige Code kann für den Prozess $X(t) = \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i$ modifiziert werden, wobei Y_i und Z_i nach F_Y und F_Z jeweils verteilt sind. Dabei werden die Variablen Y_i und Z_i lediglich durch nach F_Y und F_Z verteilte Werte substituiert und Parameter nach dem Masswechsel entsprechend der jeweiligen Verteilungen berechnet.

Der folgende in der Programmiersprache R implementierte Algorithmus 3.27 berechnet die Ausfallwahrscheinlichkeit des Prozesses $X(t) = \sum_{i=1}^{A(t)} Y_i - \sum_{i=1}^{B(t)} Z_i$, wobei $Y_i \sim \text{Exp}(\mu)$, $Z_i \sim \text{Exp}(\nu)$ für alle i , bis zum Ruin $\tau = \inf\{t \geq 0 : X(t) \geq d\}$, $d > 0$ unter dem Mass \mathbb{P}^γ exakt und schätzt sie.

C Monte-Carlo-Simulation des Prozesses unter Masswechsel

```
#Eingabe der Parameter
d, a, b, m, v

gamma <- (b*m-a*v)/(b+a) #          #gamma in exponentiellen Fall
AW <- exp(-gamma * d)*((a*(m + v))/(m*(a + b))) #Exakte Ruinw.-keit

#Parameter nach Masswechsel
alpha <- a* m/(m-gamma) #LY(s)=m/(m-s) Exp-Laplacetransformierte von Y_1
beta <- b* v/(v+gamma) #LZ(s)=n/(n-s) Exp-Laplacetransformierte von Z_1
mu <- m - gamma
nu <- v + gamma

n <- 1000 #Anzahl der Pfade
TAU <- c() #Zeitpunkt des Ruins
Overshoot <- c() #Überschuss nach dem Ruin

for ( i in 1:n)
{
  AB <- 0 #Vektor der Forderungen der Kauf- und Verkaufsaufträge
  TY <- 0
  TZ <- rexp( 1, beta) #Zwischeneintrittszeiten der Verkaufsaufträge

  while ( sum(AB) < d)
  {
    TY <- c ( TY, rexp(1, alpha)) #Zwischeneintrittszeiten
    #der Kaufaufträge
    while ( sum( TZ) < sum( TY))
    {
      AB <- c( AB, -rexp(1, nu))
      TZ <- c( TZ, rexp( 1, beta))
    }
    AB <- c( AB, rexp(1, mu))
  }
  ty <- cumsum( TY)
  ty <- ty[ 2:length( ty)] #Eintrittszeiten der Kaufaufträge
  tz <- cumsum( TZ)
  tz <- tz[ 1:length( tz) - 1] #Eintrittszeiten der Verkaufsaufträge
  t <- sort( c( ty, tz)) #Eintrittszeiten der Aufträge

  X <- cumsum(AB) #Der Prozess X_t für t>=0
  TAU[i] <- t[ length( t)] #Zeitpunkt des Ruins des i-ten Pfades
  Overshoot[i] <- X[length(X)] - d #Überschuss nach dem Ruin
  #des i-ten Pfades
}
#Berechnung des Schätzers des Überschusses
OvershootSchaetzer <- sum( Overshoot) / n
#Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeit
Ruin <- exp( -gamma*( d + OvershootSchaetzer))

DATEN <- cbind(a,b,m,v,a*v,b*m, alpha, beta, mu, nu, AW, Ruin)
(DATAN <- round(DATEN, digits = 4))
```

Literaturverzeichnis

- [1] Asmussen, S.: „*Ruin Probabilities*“ World Scientific Publishing, 2001.
- [2] Baum, D.: „*Grundlagen der Warteschlangentheorie*“, Springer Verlag, 2013.
- [3] Garman, M.: „*Market microstructure*“ Journal of Financial Economics 3, 257-275, 1976.
- [4] Gatto, R.: „*Stochastische Modelle der aktuariellen Risikotheorie*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
- [5] Grimm, V., A. Ockenfels und G. Zöttl: „*Strommarktdesign: Zur Ausgestaltung der Auktionsregeln an der EEX*“ ZfE Zeitschrift für Energiewirtschaft, 147-161, 2008.
- [6] Grimm, V., A. Ockenfels und G. Zöttl: „*Ein Vergleich ausgewählter europäischer Strombörsen*“ ZfE Zeitschrift für Energiewirtschaft, 162-170, 2008.
- [7] Grimm, V., A. Ockenfels und G. Zöttl: „*Strommarktdesign: Preisbildungsmechanismus im Auktionsverfahren für Stromstundenkontrakte an der EEX*“ Gutachten im Auftrag der European Energy Exchange AG, 2008.
- [8] Klenke, A.: „*Wahrscheinlichkeitstheorie*“ 3. Auflage, Springer Verlag, 2013.
- [9] Lüdecke, T.: „*Struktur und Qualität von Finanzmärkten*“ Deutscher Universitäts Verlag, Wiesbaden: Gabler, 1996.
- [10] Madhavan, A.: „*Market microstructure: A survey*“ Journal of Financial Markets 205-258, 2000.
- [11] O’Hara, M.: „*Market Microstructure Theory*“ Blackwell Publishing, 1995.
- [12] Rolski, T., H. Schmidli, V. Schmidt and J. Teugels: „*Stochastic Processes for Insurance and Finance*“, Wiley, 1999.
- [13] Stute, W.: „*Finanzmathematik*“ Skript zur Vorlesung, 2012-2013.
- [14] Stute, W.: „*Stochastik*“ Skript zu Vorlesungen 2011-2014.
- [15] Tricomi F. G.: „*Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion*“, Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 2, 136-148, 1950.