Übungen zur Vorlesung
“Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 13

Abgabetermin: 3.2.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Zeigen Sie mittels Theorem 5.10, dass der Schätzer $d(X) = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$ für das Uniformverteilungsmodell

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}, \{(\tfrac{1}{\theta_1-\theta_0}\mathbb{1}_{(\theta_0,\theta_1)} \cdot \lambda)^n : \theta_0 < \theta_1\})$$

ein UMVUE für den Erwartungswert ist.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Vervollständigen Sie den Beweis von Proposition 5.5 im Skript zum mathematischen Teil der Vorlesung für den Fall $k > 1$ mit $\mathcal{P} = \mathbb{R}^k$ und $c = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^k}$.

Aufgabe 51 (8 Punkte)

Es gelte $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1}$, wobei $|\theta| < 1$ und $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unkorrelierten Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vorhersagegleichungen, dass die beste lineare Vorhersage für X_{n+1} gegeben $(X_n, X_{n-1}, \ldots)$

$$\hat{X}_{n+1} = -\sum_{j=1}^{\infty} \theta^j X_{n+1-j}$$

ist. Wie groß ist der erwartete quadratische Fehler?

Bestimmen Sie außerdem die beste lineare Vorhersage von X_{n+1} gegeben $(X_1, \ldots, X_n)$ im Fall $\theta = 1$ und deren quadratischen Fehler.