Übungen zur Vorlesung
“Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 11

Abgabetermin: 20.1.2016, zu Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 41 (4 Punkte)

$X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 1) = \theta = 1 - \mathbb{P}_\theta(X_1 = 0)$.

a) Zeigen Sie, dass der Schätzer
$$T_n := \frac{\sqrt{n}\overline{X} + 1/2}{\sqrt{n} + 1}$$
ein Minimaxschätzer für θ unter quadratischem Verlust ist.

Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 2.38 aus dem Theorieskript und bestimmen Sie k und l derart, dass der zugehörige Bayes-Schätzer konstantes Risiko besitzt.

b) Sei r_n das Bayes-Risiko von T_n und R_n die Risikofunktion des arithmetischen Mittels jeweils unter quadratischem Verlust. Zeigen Sie

i) $\{\theta \in (0,1) | r_n \leq R_n(\theta)\} = [1/2 - c_n, 1/2 + c_n]$ für ein $c_n \in (0, 1/2)$.

ii) $c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_\theta R_n(\theta)/r_n = 1$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Betrachten Sie das statistische Modell $(\mathrm{id}_{\mathbb{N}_0^n}, \{(\mathrm{Poi}(\theta))^n : \theta \in (0,\infty)\})$ der n-dimensionalen Poisson-Verteilungen und eine a-priori-Verteilung mit Dichte

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

für $\alpha, \beta > 0$. (Dies ist die Dichte der $\Gamma(\alpha,\beta)$-Verteilung.) Zeigen Sie, dass

a) die a-posteriori-Verteilung bei gegebenem $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine $\Gamma(a + \sum_{i=1}^n x_i, \beta + n)$-Verteilung ist,

b) $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ für $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$ und

c) bestimmen Sie einen Bayes-Schätzer für θ.

(bitte wenden)

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob es sich bei dem F-Test aus dem Verfahren der einfaktoriellen Varianzanalyse ebenfalls um einen LQ-Test handelt.

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{B}(10, \theta)$ für $\theta \in [0, 1]$. Wir betrachten die Schätzung von π, θ_0, θ_1 im statistischen Modell $(X, \{(\pi\mathbb{P}_{\theta_1} + (1-\pi)\mathbb{P}_{\theta_0})^n\})$. Wir beobachten hierbei für $n = 10$ die Datenpunkte $x = (7, 4, 6, 6, 9, 4, 3, 1, 7, 1, 5, 5, 6, 8, 7, 2, 4, 8, 5, 8)$.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens (etwa dem Newton-Verfahren) den Maximum-Likelihood-Schätzer für $(\pi, \theta_0, \theta_1)$ in obigem statistischen Modell.

b) Führen Sie den EM-Algorithmus zur Maximum-Likelihood-Schätzung durch. Welche Funktion maximieren Sie hierbei?