

# Übungen zur Vorlesung “Mathematische Statistik“

Wintersemester 2015/16, Blatt 9

**Abgabetermin:** 7.1.2016, zwischen 9:30 und 12:30 Uhr in Raum 244  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.  
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

## Aufgabe 33

(4 Punkte)

Zeigen Sie für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , dass

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

wobei  $\Gamma$  die Gamma-Funktion ist, und bestimmen Sie für eine  $\beta(\alpha, \beta)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  die Varianz und alle Momente  $\mathbb{E}[X^n]$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

## Aufgabe 34

(4 Punkte)

Erzeugen Sie für  $\alpha = 1$  eine Stichprobe  $\chi_\alpha^2$ -verteilter Daten  $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_{99})$ . Schätzen Sie mit Hilfe des idealen und approximativen Bootstrap-Schätzers den Bias und die Varianz eines geeigneten Schätzers für den Median von  $\chi_\alpha^2$ .

## Aufgabe 35

(4 Punkte)

Sei  $(X, \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \mathbb{A}\})$  ein statistisches Modell mit  $E = \mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{P}_\theta$  die empirische Verteilung der Daten. Berechnen Sie den Plugin-Schätzer von  $\mathbb{E}(\mathbb{P}_\theta) := \mathbb{V}_\theta[X_1]$ .

## Aufgabe 36

(4 Punkte)

Zeigen Sie die letzte Ungleichung in Proposition 9 des Bootstrap-Skriptes:

$$\mathbb{V}_\theta[v_{\theta,g,boot}^B(X)] \geq \mathbb{V}_\theta[v_{\theta,g,boot}(X)].$$

*Wir wünschen Ihnen ein frohes Fest  
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!*